В. М. АЛЕКСЕЕВ
Э. М. ГАЛЕЕВ
В. М. ТИХОМИРОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОПТИМИЗАЦИИ

ТЕОРИЯ · ПРИМЕРЫ · ЗАДАЧИ

Допущено Министерством высшего и среднего образования СССР в качестве учебного пособия для студентов математических специальностей высших учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.18
А 47
УДК 519.6

Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. Учебное пособие. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 288 с.

В книге собрано примерно 700 задач на отыскание экстремумов для конечномерного случая, для задач классического вариационного исчисления, оптимального управления и выпуклого программирования. Содержатся элементы функционального анализа, дифференциального исчисления и выпуклого анализа.

В книге приведены теория, необходимая для решения задач, и примеры. Основу решения всех задач составляет единый принцип, восходящий к Лагранжу. Часть задач приведена с решениями. Имеется большое количество трудных задач, которые могут быть использованы в качестве курсовых и дипломных работ.

Для студентов вузов по специальностям «Математика» и «Прикладная математика», а также для аспирантов и научных работников.

Владимир Михайлович Алексеев, Эльфат Михайлович Галеев, Владимир Михайлович Тихомиров

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОПТИМИЗАЦИИ

Редактор *Н. Л. Григоренко*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева.* Корректор *Г. В. Подвольская*

ИБ № 12229

Сдано в набор 14.06.83. Подписано к печати 31.01.84. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 15,12. Условн. кр.-отт. 15,12. Уч.-изд. л. 17,9. Тираж 18 000 экз. Заказ № 677. Цена 90 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

$$А\frac{1702070000-042}{053(02)-84}67\text{-}83$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль методов оптимизации в экономике, технике, естествознании и самой математике огромна. Поэтому в наше время математическое образование немыслимо без элементов теории оптимизации.

Теория оптимизации переживает период бурного развития. Всего лишь четверть века тому назад в курсах математики касались лишь двух ее разделов — экстремумов функций многих переменных и вариационного исчисления. За эти годы сформировались новые дисциплины — выпуклый анализ, линейное и нелинейное программирование, оптимальное управление. Ныне они находят свое место в курсах высшей математики втузов и университетов. Создание этих дисциплин должно, без сомнения, внести новое в преподавание как традиционных разделов теории экстремальных задач, так и некоторых частей классического и функционального анализа.

Цель этой книги — способствовать тому, чтобы методы теории экстремальных задач заняли достойное место в современном математическом образовании.

Мы рассчитываем на то, что задачник будет использован и в обычных технических вузах, и в технических вузах с углубленным курсом математики, и в университетах. Нам представляется, что при любом уровне преподавания математики должно найтись место для элементов теории экстремальных задач. В нашем задачнике представлены важные разделы этой теории: в § 2 — математическое программирование, в §§ 5—7 — классическое вариационное исчисление, в § 10 — оптимальное управление. Эти параграфы являются основными в задачнике. Пункты «Постановка задачи» и «Правило решения» названных параграфов, а также примеры, разобранные в них, не требуют для своего понимания никаких специальных знаний, кроме основ математического анализа. Вместе с тем они дают возможность решать бо́льшую часть задач этой книги. Таким образом, решать основную массу задач можно, опираясь лишь на обычный втузовский курс дифференциального и интегрального исчисления.

В вузах с углубленным изучением математики могут быть использованы теоретические разделы перечисленных параграфов, относящиеся к необходимым условиям экстремума. Этот материал мы старались тщательно отработать методически. При доказательствах используются лишь основополагающие факты классического анализа, среди которых важнейшее место занимают теоремы об обратной и неявной функции.

Все остальное в теоретической части книги рассчитано на преподавание в университетах. § 1 посвящен базовым понятиям и теоремам функционального анализа, с помощью которых доказываются важнейшие теоремы теории экстремальных задач. На них же основывается выпуклый анализ. Основам выпуклого анализа посвящен § 3. Роль выпуклого анализа в общей теории экстремальных задач раскрывается в §§ 4, 9. Этот материал можно использовать в специальных курсах. § 8 посвящен общей задаче классического вариационного исчисления — задаче Лагранжа.

Материал § 12 призван показать, как можно использовать элементы теории экстремальных задач в курсах алгебры, анализа, геометрии, а также в различных исследованиях теоретического и прикладного характера.

Несколько слов об особенностях этой книги. Главная ее особенность состоит в том, что она построена на *единой методологии*, основывающейся на общем принципе исследования экстремальных задач, восходящем к Лагранжу. Сам принцип излагается во введении. Освоив его, можно приступать сразу к решению задач любого раздела. Сводный отдел (§ 11) как раз и приспособлен для такой методики решения экстремальных задач.

Вторая важная особенность состоит в том, что мы стремились дать *исчерпывающее исследование задач*. Поэтому в задачнике большее, чем обычно, внимание уделено достаточным условиям.

И наконец, мы всюду, где это возможно, старались подчеркивать *плодотворность новых методов теории* — выпуклого анализа, выпуклого программирования и оптимального управления.

В задачнике около 700 задач. Практически все они снабжены ответами. Часть задач приведена с решениями.

При написании книги нашел отражение опыт преподавания курсов оптимизации на механико-математическом факультете МГУ. Задачник примыкает к учебному пособию «Оптимальное управление», написанному

В. М. Алексеевым, В. М. Тихомировым и С. В. Фоминым (Наука, 1979 г.). Но, в отличие от этого пособия, задачник рассчитан на более широкую аудиторию. Поэтому в важнейших частях изложение материала независимо от упомянутого пособия.

Работа над задачником едва лишь началась, когда в расцвете своих творческих сил скончался В. М. Алексеев, очень много сил отдавший разработке и постановке на механико-математическом факультете лекционных курсов и семинарских занятий. Общий замысел этой книги и ее план принадлежат В. М. Тихомирову, теоретические разделы явились плодом нашего совместного труда, в составлении и подборе задач бо́льшая доля принадлежит Э. М. Галееву.

При работе над разделом «Задачи» мы использовали материалы из архива В. М. Алексеева, «Сборник задач по оптимальному управлению», написанный Э. М. Галеевым, А. Г. Кушниренко и В. М. Тихомировым (ротапринтное издание МГУ, 1980 г.), сборник из 100 задач, подготовленный В. М. Алексеевым и В. М. Тихомировым для французского издания учебного пособия, материалы некоторых учебников и задачников (из тех, что приведены в списке литературы в разделе «Учебники и учебные пособия») и некоторые ротапринтные издания по оптимизации, любезно присланные нам их авторами, в частности, пособия Казахского, Киевского и Ярославского университетов.

Мы рады выразить свою благодарность сотрудникам кафедры общих проблем управления механико-математического факультета за большую и разностороннюю помощь, особенно — М. И. Зеликину, С. В. Конягину и А. В. Фурсикову. Мы благодарны также студентам и аспирантам кафедры — настоящим и бывшим — способствовавшим улучшению книги. И в первую очередь — Ю. А. Александрову, С. А. Аюнцу, А. П. Буслаеву, Динь Зунгу, Б. Лудереру, Г. Г. Магарил-Ильяеву, Е. Б. Пекарю и А. А. Петросяну.

Мы будем очень признательны за любые замечания и предложения, относящиеся к замыслу, плану и содержанию книги.

Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров

Введение

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

0.1. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами. С задачами на максимум и минимум мы сталкиваемся еще в школе. Рассмотрим для примера две планиметрические задачи.

Задача 1. Найти на данной прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух заданных точек была минимальна (рис. 1).

Задача 2. Вписать в круг прямоугольник наибольшей площади (рис. 2).

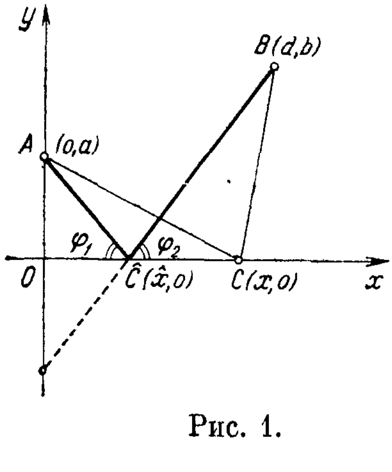

Рис. 1.

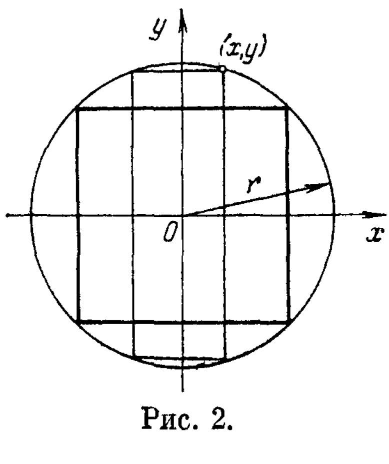

Рис. 2.

Первая задача — это задача на минимум, вторая — на максимум. Слово maximum по латыни означает «наибольшее», слово minimum — «наименьшее». Оба эти понятия — *максимум* и *минимум*, наибольшее и наименьшее — объединяются единым термином *экстремум* (от латинского extremum, означающего «крайнее»). Иногда употребляют слово *оптимальный*, от латинского optimus, что означает наилучший, совершенный. Таким образом, задачи 1 и 2 — это *экстремальные задачи*, или *задачи оптимизации*. Теорию задач на отыскание наибольших и наименьших величин называют или *теорией экстремальных задач*, или *теорией оптимизации*, или иногда *теорией оптимального управления*. При употреблении последнего термина обычно предполагается связь задач с практическими приложениями.

Задачи 1 и 2 сформулированы словесно, без формул. Экстремальные задачи, возникающие в естественных науках или на практике, обычно ставятся именно так — словесно, в содержательных терминах той области, где данная задача возникла. Чтобы можно было воспользоваться теорией, необходим перевод задач на математический язык. Этот перевод называется *формализацией*. Одна и та же задача может быть формализована разными способами, и простота решения зачастую сильно зависит от того, насколько удачно она формализована.

Осуществим формализации задач 1 и 2. Начнем с задачи 1. Направим ось Ox по заданной прямой, а ось Oy проведем через точку A (см. рис. 1). Пусть координаты точек A и B таковы: $A=(0, a)$ и $B=(d, b)$; координата точки $C=(x, 0)$. Тогда мы приходим к следующей задаче: *найти минимум функции*

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

по всем $x\in\mathbf{R}$.

Формализуем задачу 2. Пусть окружность описывается уравнением $x^2+y^2=r^2$. Направим оси Ox и Oy параллельно сторонам прямоугольника и обозначим через (x, y) координаты вершины прямоугольника, лежащей в первом квадранте (см. рис. 2). Тогда площадь прямоугольника равна $4xy$. Получаем такую задачу: *найти максимум функции* $f_0(x, y)=4xy$ *при условиях*

$$f_1(x, y)=x^2+y^2-r^2=0,\quad f_2(x, y)=x\geqslant 0,$$
$$f_3(x, y)=y\geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что условия $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ излишни, и задача *найти максимум* $4xy$ *при условии* $x^2+y^2=r^2$ эквивалентна задаче с неравенствами.

Любая формализованная задача устроена аналогично. Она включает в себя следующие элементы: *функционал* $f\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ (X — *область определения функционала* f) и *ограничение*, т. е. подмножество $C\subset X$.

Поясним некоторые встретившиеся здесь обозначения и термины: $\overline{\mathbf{R}}$ — это расширенная действительная (вещественная) прямая, т. е. совокупность всех действительных чисел, дополненная значениями $+\infty$ и $-\infty$; запись $F\colon X\to Y$ означает, что отображение F имеет область определения X, а $F(x)$ для каждого элемента x из X лежит в множестве Y; слово «функционал» мы употребляем для отображений в расширенную прямую $\overline{\mathbf{R}}$. Таким образом, формализовать экстремальную задачу — это значит точно описать ее элементы f, X и C.

Для формализованной задачи употребляется запись

$$f(x) \to \inf \ (\sup), \qquad x \in C. \tag{з}$$

Точки $x \in C$ называются *допустимыми*. Если $C = X$, то задача называется *задачей без ограничений*.

Задачу на максимум всегда можно свести к задаче на минимум, заменив задачу $f(x) \to \sup$, $x \in C$, задачей $\tilde{f}(x) \to \inf$, $x \in C$, где $\tilde{f}(x) = -f(x)$. И, наоборот, задачу на минимум можно аналогичным образом свести к задаче на максимум. Для определенности в тех случаях, когда формулировки необходимых условий экстремума в задачах на минимум и максимум разные, будем выписывать их только для задачи на минимум. Если необходимо исследовать обе задачи, то будем писать $f(x) \to \mathrm{extr}$, $x \in C$.

Приведем формализованные записи задач 1 и 2. Задача 1 $(X = C = \mathbf{R})$:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \to \inf. \tag{з$_1$}$$

Задача 2 (X — здесь двумерная плоскость, обозначаемая $\mathbf{R}^2$):

$$4xy \to \sup; \qquad x^2 + y^2 = r^2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \tag{з$_2$}$$

Для задачи 2 имеется, как было сказано выше, другая формализация:

$$4xy \to \sup; \qquad x^2 + y^2 = r^2. \tag{з$_2'$}$$

Задача (з$_1$) — задача без ограничений, задача (з$_2$) — с ограничением $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, задаваемым в виде равенств и неравенств, задача (з$_2'$) — с ограничением типа равенства.

Допустимая точка $\hat{x}$ называется *абсолютным* (или еще говорят *глобальным*) *минимумом* (*максимумом*) в задаче (з), если $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ для любого $x \in C$ (соответственно $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ для любого $x \in C$). При этом мы пишем $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$ з ($\operatorname{abs\,max}$ з). Абсолютный минимум (максимум) задачи будем называть *решением задачи*. Величина $f(\hat{x})$, где $\hat{x}$ — решение задачи, называется *численным значением задачи* (иногда для сокращения говорим просто *значение задачи*). Эту величину будем обозначать $S_з$ или $S_{\min}(S_{\max})$.

В задаче 1 абсолютный минимум $\hat{x}$, определяющий искомую точку $\hat{C}=(\hat{x},\ 0)$, характеризуется, как известно из геометрии, тем, что острые углы, образованные отрезками $[A\hat{C}]$ и $[\hat{C}B]$ с осью Ox, равны («угол падения равен углу отражения»); значение задачи $S_{з_1}=\sqrt{(a+b)^2+d^2}$.

В задаче 2 искомым прямоугольником является квадрат (попробуйте доказать это геометрически); это соответствует решению $\hat{x}=r/\sqrt{2}$, $y=r/\sqrt{2}$, $S_{з_2}=2r^2$.

Кроме глобальных экстремумов будем также рассматривать локальные экстремумы. Дадим их строгое определение. Пусть в задаче (з) X — нормированное пространство. Говорят, что точка $\hat{x}$ доставляет в (з) *локальный минимум* (*максимум*), и пишут $\hat{x}\in \operatorname{loc\,min} з$ ($\operatorname{loc\,max} з$), если $\hat{x}\in C$ и существует $\delta>0$ такое, что для любой допустимой точки x, для которой $\|x-\hat{x}\|<\delta$, выполняется неравенство $f(x)\geqslant f(\hat{x})$ ($f(x)\leqslant f(\hat{x})$). Иными словами, если $\hat{x}\in \operatorname{loc\,min} з$ ($\operatorname{loc\,max} з$), то существует окрестность $\mathcal{U}$ точки $\hat{x}$ такая, что $\hat{x}\in \operatorname{abs\,min} з'$ ($\operatorname{abs\,max} з'$) в задаче

$$f(x)\to \inf\ (\sup),\qquad x\in C\cap\mathcal{U}. \tag{з$'$}$$

Теория экстремальных задач дает правила нахождения решений экстремальных задач. В большинстве своем эти правила выделяют некоторое подмножество точек, среди которых должно содержаться решение задачи. Это множество точек, которое мы называем *критическим*, возможно, несколько шире, чем множество абсолютных и даже локальных экстремумов. После нахождения всех критических точек надо выделить из них решения.

Найдем критические точки, локальные и абсолютные экстремумы в следующей задаче.

Задача 3.

$$f(x)=x^3(x^2-1)\to \operatorname{extr},\qquad -1\leqslant x\leqslant 2 \tag{з$_3$}$$

(рис. 3).

Абсолютный экстремум в задаче может достигаться на концах отрезка или во внутренней точке. Если экстремум достигается во внутренней точке, то в этой точке производная должна равняться нулю, т. е.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 5x^4-3x^2=0\Leftrightarrow x\in\{-\sqrt{3/5},\ 0,\ \sqrt{3/5}\}.$$

Таким образом, имеем 5 критических точек: $x_1=-1$, $x_2=-\sqrt{3/5}$, $x_3=0$, $x_4=\sqrt{3/5}$, $x_5=2$, из которых точки

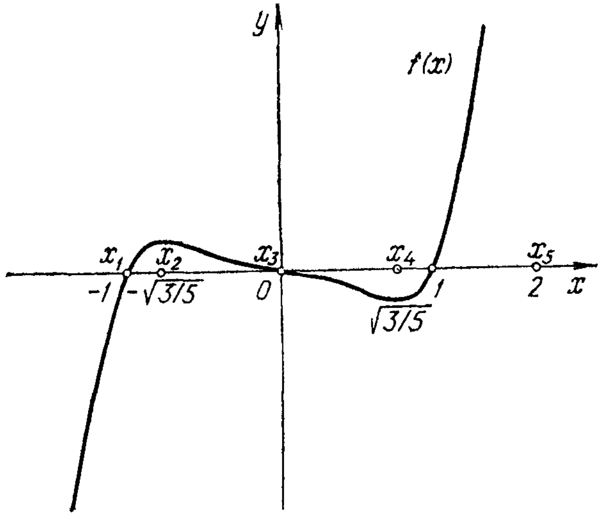

Рис. 3.

x_2, x_3, x_4 являются стационарными. Из графика функции f (см. рис. 3) видно, что x_1, $x_4 \in \text{loc}\min з_3$; x_2, $x_5 \in \in \text{loc}\max з_3$; $x_4 \in \text{abs}\min з_3$; $x_5 \in \text{abs}\max з_3$.

0.2. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями. Сущность принципа Лагранжа состоит в редукции задач с ограничениями к ряду задач более простой структуры (в большинстве случаев — к задачам без ограничений).

Прежде чем переходить к описанию этого принципа, покажем на примере задачи 1 (п. 0.1), как следует поступать с задачами без ограничений. Функция f в формализации ($з_1$) из п. 0.1 задачи 1 дифференцируема. Из курса дифференциального исчисления известна теорема Ферма, согласно которой, если точка $\widehat{x}$ доставляет локальный экстремум дифференцируемой функции f, то выполнено соотношение $f'(\widehat{x}) = 0$. Имеем

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственное решение $\widehat{x}$, при котором как раз и выполнено соотношение «угол падения равен углу отражения» (см. рис. 1):

$$\frac{\widehat{x}}{\sqrt{a^2 + \widehat{x}^2}} = \frac{d - \widehat{x}}{\sqrt{b^2 + (d - \widehat{x})^2}} \Leftrightarrow \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

Из сказанного вытекает, что если абсолютный минимум существует, то им может быть лишь точка $\widehat{x}$; другие точки не могут быть даже локальными минимумами. Можно доказать, что в задаче ($з_1$) минимум действительно существует. (Доказательство «теоремы существования» решения в ($з_1$) осуществляется, как и в большинстве подобных случаев, с помощью теоремы Вейерштрасса — см. далее п. 1.2.1.) Таким образом, задача ($з_1$) решена и $\hat{x}$ есть ее решение.

Все вышесказанное дает повод наметить план действий для решения задач без ограничений и при наличии некоторых простейших ограничений (такого рода задачи мы далее называем *элементарными*).

1. Формализовать задачу.
2. Выписать необходимые условия экстремума.
3. Найти все критические точки.
4. Отыскать решения среди критических точек (например, доказав, что решение существует, и перебрав значения функционала в критических точках) или показать, что решения нет.

Принцип Лагранжа — это правило исследования задач с ограничениями путем сведения первоначальной задачи к отысканию и исследованию критических точек некоторой элементарной задачи. Покажем, в чем состоит принцип Лагранжа, на примере конечномерных задач с ограничениями типа равенств.

Рассмотрим задачу ($X = \mathbf{R}^n$)

$$f_0(x) \to \mathbf{extr}; \quad f_1(x) = 0, \ \ldots, \ f_m(x) = 0, \tag{з}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Здесь ограничение задается системой равенств $C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m\}$. Функционал f_0 и функции f_i, задающие уравнения связи $f_i(x) = 0$, будем предполагать непрерывно дифференцируемыми (иначе говоря, такими, что все их частные производные первого порядка непрерывны).

Посмотрим, как предлагал решать эту задачу сам Лагранж. Он пишет: «Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одной или несколькими функциями, то нужно прибавить к функции, экстремум которой ищется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных».

Воспользуемся правилом Лагранжа (несколько уточнив его). Первое, что нужно сделать согласно Лагранжу, это «прибавить к функции, экстремум которой ищется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители». Составим функцию

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x), \qquad \lambda = (\lambda_0, \ldots \lambda_m),$$

которую будем называть *функцией Лагранжа*. Числа λ_i называются *множителями Лагранжа*. Первое уточнение состоит в том, что и функция, экстремум которой ищется, домножена на неопределенный множитель. Если не сделать этого уточнения, то рецепт Лагранжа может оказаться неверным (см. далее пример 1). При этом в задаче на минимум следует брать $\lambda_0 \geqslant 0$, в задаче на максимум брать $\lambda_0 \leqslant 0$.

Второе, что необходимо сделать согласно Лагранжу, это «искать максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы». По замыслу Лагранжа, следовательно, надо рассмотреть задачу

$$\mathscr{L}(x, \lambda) \to \text{extr (по } x) \tag{$з_э$}$$

(мысленно зафиксировав λ).

Задача ($з_э$) проще, чем исходная, так как здесь ограничений нет. Она относится к классу элементарных. Не будем искать ее максимумы и минимумы (ибо может оказаться, что ее максимумы и минимумы не имеют отношения к максимуму и минимуму исходной задачи — см. далее пример 2). Поступим несколько иначе, будем искать *стационарные точки в задаче* ($з_э$), т. е. напишем для элементарной задачи ($з_э$) необходимое условие минимума или максимума, выражающееся все в той же самой теореме Ферма. Согласно этой теореме должны удовлетворяться уравнения

$$\mathscr{L}_x(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_m) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, n$$

(в которых не все множители Лагранжа равны нулю). Полученные n уравнений, дополненные m уравнениями связи, и «послужат для определения всех неизвестных». В самом деле, хотя неизвестных (x, λ) на одно больше, чем количество уравнений, но надо учесть то обстоятельство, что множители Лагранжа можно умножать на любое число, отличное от нуля. И именно в силу этого число уравнений равно числу неизвестных. В подобных случаях мы будем говорить о *полноте набора условий* для определения стационарных точек. Надо иметь в виду, что наибольший интерес имеют те случаи, когда $\lambda_0 \neq 0$, ибо при $\lambda_0 = 0$ соотношения принципа Лагранжа указывают лишь на некоторую вырожденность ограничений (от которой зачастую легко избавиться) и оказываются не связанными с функционалом. Решения полученных уравнений $(\mathscr{L}_{x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad f_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, m)$ и образуют совокупность стационарных точек.

Таким образом, для решения задачи (з) следует:

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

2. Выписать необходимые условия экстремума:

$$\mathscr{L}_x(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

3. Найти стационарные точки, т. е. допустимые точки, являющиеся решениями уравнений п. 2, в которых не все λ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, равны нулю. При этом бывает полезно рассмотреть отдельно случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно в задаче на минимум положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе, в задаче на максимум — равным минус единице или любой другой отрицательной константе.

4. Отыскать решения среди всех стационарных точек или доказать, что решений нет.

Описанная процедура и называется *принципом Лагранжа.* Этот принцип применим не только к задаче (з), но и к очень широкому кругу экстремальных задач. Большинство задач из этого задачника можно решить с помощью этого принципа. Но при этом важно иметь в виду следующее:

а) Принцип Лагранжа применим, вообще говоря, не всегда. В примере 3, приведенном ниже, решение задачи существует, но принцип Лагранжа к нему не приводит.

б) Сфера применимости принципа Лагранжа достаточно широка. Иногда к задаче нельзя применить имеющуюся теорему, однако принцип Лагранжа (примененный без обоснования) тем не менее приводит к некоторым точкам, подозрительным на экстремум, из которых можно выделить решение.

Решим теперь с помощью принципа Лагранжа задачу 2 п. 0.1.

1. Рассмотрим более простую формализацию $(з_2')$ (где множитель 4 при функционале отброшен):

$$xy \to \sup; \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \lambda_0 xy + \lambda_1(x^2 + y^2 - r^2).$$

2. Выпишем необходимые условия:

$$\mathscr{L}_x = 0, \quad \mathscr{L}_y = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 y + 2\lambda_1 x = 0, \quad \lambda_0 x + 2\lambda_1 y = 0.$$

3. Найдем стационарные точки. Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 \neq 0$ (ибо не все множители Лагранжа равны нулю) и, значит, $x = y = 0$. Но тогда условие $x^2 + y^2 = r^2$ не удовлетворяется. Следовательно, в случае $\lambda_0 = 0$ стационарных точек нет. Положим $\lambda_0 = -1$. Необходимые условия переписываются в виде

$$y = 2\lambda_1 x, \quad x = 2\lambda_1 y.$$

Из этих уравнений определяются 4 стационарные точки: $(r/\sqrt{2},\ r/\sqrt{2})$, $(r/\sqrt{2},\ -r/\sqrt{2})$, $(-r/\sqrt{2},\ r/\sqrt{2})$, $(-r/\sqrt{2},\ -r/\sqrt{2})$.

4. Максимальное значение доставляют точки $(r/\sqrt{2},\ r/\sqrt{2})$ и $(-r/\sqrt{2},\ -r/\sqrt{2})$. Соответствующие прямоугольники являются квадратами. Обе точки действительно являются решениями, но это необходимо еще обосновать. Для обоснования можно сослаться на теорему Вейерштрасса о существовании решения в задаче. Можно поступить и по-другому. Пусть $x = (r/\sqrt{2} + \alpha)$, $y = (r/\sqrt{2} + \beta)$ и $x^2 + y^2 = r^2$. Тогда $\alpha^2 + \beta^2 = -2(\alpha + \beta)r/\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$xy = (r/\sqrt{2} + \alpha)(r/\sqrt{2} + \beta) = r^2/2 + \alpha\beta - \alpha^2/2 - \beta^2/2 \leqslant r^2/2,$$

т. е. $(\hat{x},\ \hat{y}) = (r/\sqrt{2},\ r/\sqrt{2})$ есть решение задачи. Аналогичные рассуждения можно провести и для второй точки.

Ответ. Решением задачи является квадрат.

В общем случае принцип Лагранжа применяется так:

1. Формализовать задачу к виду

$$f(x, u) \to \inf; \quad F(x, u) = 0, \quad u \in \mathscr{U},$$

$f\colon X \times \mathscr{U} \to \overline{\mathbf{R}}$, $F\colon X \times \mathscr{U} \to Y$, где X и Y — нормированные пространства. Это — задача с ограничениями типа равенств, параметризованных некоторым множеством $\mathscr{U}$. Еще можно сказать, что это *задача с ограничениями типа равенств и включений.*

Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, u, y^*, \lambda_0) = \lambda_0 f(x, u) + \langle y^*, F(x, u)\rangle,$$

где y^* — элемент сопряженного пространства Y^*.

В функцию Лагранжа ограничения типа включений $u \in \mathscr{U}$ не входят.

2. Для задач

$$\mathscr{L}(x, \hat{u}, y^*, \lambda_0) \to \inf \text{ (по } x),$$

$$\mathscr{L}(\hat{x}, u, y^*, \lambda_0) \to \inf, \; u \in \mathscr{U},$$

выписать необходимые условия.

3. Найти критические точки, т. е. допустимые точки, являющиеся решениями уравнений п. 2, в которых y^* и λ_0 одновременно не равны нулю. При этом удобно бывает рассмотреть отдельно случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Отыскать решения среди всех критических точек или доказать, что решения нет.

В заключение приведем те три примера, о которых говорилось выше.

Пример 1 (показывает, что в правиле множителей Лагранжа не всегда можно полагать $\lambda_0 = 1$).

$$f_0(x_1, x_2) = x_1 \to \inf; \quad f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 = 0 \quad (X = \mathbf{R}^2).$$

Функции f_0 и f_1 непрерывно дифференцируемы. Легко понять, что решение задачи $\hat{x} = (0, 0)$. Если прямо следовать Лагранжу, то надо составить сумму $\mathscr{L} = x_1 + \lambda(x_1^3 - x_2^2)$ и далее решать уравнения

$$\mathscr{L}_{x_1} = 0, \quad \mathscr{L}_{x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \quad -2\lambda x_2 = 0.$$

Но эти уравнения несовместны с уравнением связи $x_1^3 - x_2^2 = 0$.

Пример 2 (показывает, что экстремум функции Лагранжа как задачи без ограничений может не совпадать с экстремумом исходной задачи с ограничениями).

$$f_0(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 \to \inf;$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_1^3 = 0 \quad (X = \mathbf{R}^2).$$

Ясно, что решение задачи $\hat{x} = (0, 0)$. Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \lambda_0(x_2^2 - x_1) + \lambda(x_1 + x_1^3)$. Необходимое условие экстремума:

$$\mathscr{L}_{x_1}=0,\quad \mathscr{L}_{x_2}=0 \Leftrightarrow -\lambda_0+\lambda\left(1+3x_1^2\right)=0,\quad 2\lambda_0 x_2=0.$$

Если $\lambda_0=0$, то $\lambda\neq 0$ и, следовательно, $1+3x_1^2=0$ — противоречие. Значит, $\lambda_0\neq 0$. Полагаем $\lambda_0=1$. Тогда функция Лагранжа примет вид

$$\mathscr{L}=x_2^2-x_1+\lambda\left(x_1+x_1^3\right).$$

Однако ни при каких λ эта функция в точке $\widehat{x}=(0,\ 0)$ не имеет даже локального минимума.

Пример 3 (показывает, что принцип Лагранжа при несоблюдении определенных условий может приводить к неверным результатам).

Пусть

$$X=Y=l_2,\ f(x)=x_1+x_2/2+\ldots+x_n/n+\ldots,$$
$$F(x)=(x_1,\ x_2/2,\ \ldots,\ x_n/n,\ \ldots)$$
$$(x=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)).$$

Рассмотрим задачу

$$f(x)\to\inf;\quad F(x)=0.$$

Здесь $\widehat{x}=0$ есть единственный допустимый элемент, следовательно, он и является решением задачи. Если предположить, что существуют множители Лагранжа $\lambda_0\in\mathbf{R}$ и $y^*\in l_2^*$, не равные одновременно нулю и такие, что для элементарной задачи $\mathscr{L}=\lambda_0 f(x)+\langle y^*,\ F(x)\rangle\to\inf$ выполнено необходимое условие минимума $\mathscr{L}(x,\ \lambda_0,\ y^*)$ (теорема Ферма), то

$$\mathscr{L}_x(x,\ \lambda_0,\ y^*)=0\Leftrightarrow\lambda_0=-y_1,\ \ldots,\ \lambda_0=-y_n,\ \ldots,$$

где $y^*=(y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots)\in l_2$, поскольку l_2^* изоморфно l_2 (КФ, с. 177). Но эти условия противоречивы: либо $\lambda_0\neq 0$, тогда $y^*=(\lambda_0,\ \ldots,\ \lambda_0,\ \ldots)\notin l_2$; либо $\lambda_0=0$, тогда $y^*=0$, т. е. оба множителя Лагранжа равны нулю. Здесь l_2 — пространство всех последовательностей $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$, для которых $\|x\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}<\infty$, l_2^* — пространство, сопряженное к l_2 (КФ, с. 177).

Упражнения. В упр. 1—8 привести примеры задач без ограничений об экстремуме бесконечно дифференцируемых функций одной или двух переменных, в которых выполняются указанные ниже требования.

1. Абсолютные максимум и минимум достигаются в бесконечном числе точек.

2. Функционал ограничен, абсолютный максимум достигается, минимум — нет.

3. Функционал ограничен, но абсолютные минимум и и максимум не достигаются.

4. Функционал ограничен, имеет критические точки, но абсолютные минимум и максимум не достигаются.

5. Функционал ограничен, имеет локальные максимумы и минимумы, но глобальные максимум и минимум не достигаются.

6. Имеется единственный локальный экстремум, не являющийся глобальным.

7. Имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума.

8. Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума.

9. Можно ли утверждать, что если функция одной переменной имеет в какой-либо точке локальный минимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки функция убывает, а справа возрастает?

10. Пусть функция f определена и дифференцируема на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ и $f'(x)$ имеет единственный нуль $\widehat{x}$. Доказать, что $\widehat{x}$ является точкой абсолютного минимума функции f.

11. Пусть каждый функционал на некотором множестве X достигает своего абсолютного минимума. Доказать, что X — конечное множество.

Формализовать упр. 12—17.

12. Найти кратчайшее расстояние от заданной точки $(1, 2)$ на плоскости до прямой $2x_1 + 3x_2 = 1$.

13. Найти кратчайшее расстояние от заданной точки в трехмерном пространстве до заданной плоскости.

14. Вписать в круг треугольник с наименьшей суммой квадратов сторон.

15. Найти на плоскости точку, сумма расстояний от которой до трех заданных точек минимальна.

16. Разделить заданное положительное число на две части так, чтобы произведение произведения этих частей на их разность было максимальным.

17. Среди полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, найти полином, имеющий наименьшую норму в $L_2([-1, 1])$.

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Многие факты, отмеченные в этом параграфе, содержатся в книге АТФ. Поэтому мы будем иногда ограничиваться лишь формулировками теорем.

1.1. Нормированные и банаховы пространства.

1.1.1. Основные определения. Линейное пространство X называется *нормированным*, если на X определен функционал $\|\cdot\|$: $X \to \mathbf{R}$, называемый *нормой* и удовлетворяющий условиям:

а) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in X$;

в) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X$.

Иногда, чтобы подчеркнуть, что норма задана именно на X, мы пишем $\|\cdot\|_X$. Две нормы в X $\|\ \|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Всякое нормированное пространство становится *метрическим*, если в нем ввести расстояние $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. Полное относительно введенного расстояния пространство называется *банаховым* пространством.

1.1.2. Примеры банаховых пространств.

Пример 1. Конечномерное пространство $\mathbf{R}^n$, состоящее из векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, с нормой $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

Пример 2. Пространство $C(K, \mathbf{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $x(\cdot)$: $K \to \mathbf{R}^n$, заданных на компакте K, с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max\limits_{t \in K} |x(t)|$.

Пример 3. Пространство $C^r([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ r раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $x(\cdot)$: $[t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$, заданных на конечном отрезке $[t_0, t_1] \subset \mathbf{R}$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_r = \max\{\|x(\cdot)\|_0, \ldots, \|x^{(r)}(\cdot)\|_0\}.$$

Пример 4. Пространство l_2, состоящее из последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, с нормой, задаваемой формулой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$.

1.1.3. Произведение пространств. Пусть X и Y — нормированные пространства. Декартово произведение $X \times Y$ можно превратить в нормированное пространство, введя норму

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

(легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются). Возможны и другие эквивалентные нормировки (см. далее упр. 8).

Отметим очевидное утверждение: *декартово произведение банаховых пространств банахово.*

1.1.4. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Совокупность X^* всех линейных непрерывных функционалов на X образует *сопряженное* к X пространство. Оно является банаховым пространством относительно нормы $\|x^*\|_{X^*} = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \langle x^*, x\rangle$, где $\langle x^*, x\rangle$ означает действие на x функционала x^* (КФ, с. 171). Пространство, сопряженное к конечномерному пространству $\mathbf{R}^n$, изоморфно $\mathbf{R}^n$. Скалярное произведение двух векторов $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ представляется в виде суммы $\langle y, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i$ Та же сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i$ будет обозначаться нами просто как yx, если $y \in \mathbf{R}^{n*}$, $x \in \mathbf{R}^n$; при этом следует x считать столбцом, y — строкой (и тогда yx есть не что иное, как произведение матриц).

Пусть X и Y — нормированные пространства и $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ — линейный непрерывный оператор из X в Y. Тогда можно определить *сопряженный оператор* Λ^*: $Y^* \to X^*$ такой, что $\langle y^*, \Lambda x\rangle = \langle \Lambda^* y^*, x\rangle$ $\forall x \in X$ (КФ, с. 217).

Для линейного непрерывного функционала на произведении пространств имеет место следующая очевидная

Лемма. *Всякий функционал $\Lambda \in (X \times Y)^*$ однозначно представим в виде*

$$\langle \Lambda, (x, y) \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle, \quad \text{где } x^* \in X^* \text{ и } y^* \in Y^*.$$

Упражнения.

1. Какие из перечисленных ниже функций двух переменных и при каких значениях параметров задают норму в $\mathbf{R}^2$:

а) $N(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad p > 0$;

б) $N(x) = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|$;

в) $N(x) = \max\{|a_{11}x_1 + a_{12}x_2|, |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|\}$;

г) $N(x) = \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\right)^{1/2}$?

2. Доказать, что нормы $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ эквивалентны.

3. Доказать, что если $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{R}^n$, то единичный шар в этой норме $B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ является замкнутым выпуклым ограниченным центрально-симметричным множеством, для которого центр — начало координат — является внутренней точкой.

4. Доказать, что если множество B является замкнутым выпуклым ограниченным центрально-симметричным множеством в $\mathbf{R}^n$, для которого центр — начало координат — является внутренней точкой, то существует такая норма, при которой B будет единичным шаром.

5. Доказать, что все нормы в $\mathbf{R}^2$ эквивалентны.

6. Доказать, что все конечномерные нормированные пространства банаховы.

7. Построить пример нормированного, но не банахова пространства.

8. Доказать, что если $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\ \|_Y)$ — нормированные пространства, то $\|x\|_X + \|y\|_Y$ и $\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2\right)^{1/2}$ — эквивалентные нормы в $X \times Y$.

9. Пусть нормированное пространство X состоит из непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с нормой $\|x(\cdot)\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$. Принадлежит ли линейный функционал $\langle x^*, x(\cdot) \rangle = x(0)$ пространству X^*?

10. Чему равна норма $\|x\|$, $x \in \mathbf{R}^2$, если единичный шар задается неравенствами:

а) $B = \{(x_1, x_2) \mid -a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_1, \ -a_2 \leqslant x_2 \leqslant a_2\}$;

б) $B = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} \leqslant 1, -b_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, -b_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\right\}$?

11. Привести пример двумерного подпространства $C([0, 1])$, единичным шаром которого является единичный круг (или иначе: рассечь единичный шар пространства $C([0, 1])$ плоскостью так, чтобы в сечении был круг).

12. Пусть $X = \mathbf{R}^2$. Найти норму пространства, сопряженного к $(X, \|\cdot\|)$, если норма в X задается соотношениями:

а) $N(x) = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$;

б) $N(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$;

в) $N(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, $p > 1$;

г) $N(x) = \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\right)^{1/2}$,

$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$

1.2. Некоторые теоремы из геометрии и функционального анализа.

1.2.1. Теоремы Вейерштрасса о достижении максимума и минимума. Чаще всего будет использована следующая основная

Теорема Вейерштрасса. *Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства достигает своих абсолютных максимума и минимума* (Н, т. 1, с. 235).

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $\mathbf{R}^n$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty\right)$, то f достигает своего абсолютного минимума (максимума) на любом замкнутом подмножестве $\mathbf{R}^n$.*

Напомним, что множество A в метрическом пространстве называется *компактом*, если из всякой последовательности элементов из A можно выбрать сходящуюся к элементу из A подпоследовательность или (равносильное определение) если из всякого покрытия A открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Ограниченное и замкнутое подмножество конечномерного пространства является компактом.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, заданная на метрическом пространстве X, называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если для любого C множество $\{x \in X \mid f(x) \leqslant C\}$ $(\{x \in X \mid f(x) \geqslant C\})$ замкнуто.

Следующая обобщенная теорема Вейерштрасса применима ко многим задачам вариационного исчисления и оптимального управления.

Теорема Вейерштрасса (обобщенная). *Полунепрерывная снизу (сверху) функция f, заданная в метрическом пространстве X, достигает минимума (максимума) на всяком компакте, содержащемся в X. В частности, f достигает своего минимума (максимума) на всем X, если для некоторого C множество $\{x \mid f(x) \leqslant C\}$ ($\{x \mid f(x) \geqslant C\}$) непусто и компактно* (АТФ, с. 251).

Теорема Вейерштрасса и следствие из нее сразу вытекают из этой обобщенной теоремы.

1.2.2. Теоремы отделимости. Введем понятия отделимости и строгой отделимости двух множеств. Пусть A и B — некоторые подмножества нормированного пространства X, X^* — сопряженное к X пространство (пространство линейных непрерывных на X функционалов). Говорят, что функционал $x^* \in X^*$ *разделяет* множества A и B, если

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant \langle x^*, y\rangle \qquad \forall x \in A \text{ и } \forall y \in B.$$

Функционал $x^* \in X^*$ *строго разделяет* множества A и B, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant \langle x^*, y\rangle - \varepsilon \qquad \forall x \in A \text{ и } \forall y \in B.$$

В первом случае множества A и B называются *отделимыми*, во втором случае — *строго отделимыми*.

В конечномерном случае функционал x^* можно отождествить с вектором из $\mathbf{R}^n$. Равенство $\langle x^*, x\rangle = \beta$, где $x^* \neq 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, определяет в $\mathbf{R}^n$ гиперплоскость, т. е. линейное многообразие размерности $n-1$. Поэтому отделимость множеств A и B означает существование гиперплоскости, делящей $\mathbf{R}^n$ на две части (полупространства), в одной из которых находится множество A, а множество B расположено в другой. Сформулируем теоремы отделимости для конечномерного случая.

Теорема 1 (первая теорема отделимости в конечномерном случае). *Пусть A — непустое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$, не содержащее точки $b \in \mathbf{R}^n$. Тогда точку b можно отделить от множества A.*

Теорема 2 (вторая теорема отделимости в конечномерном случае). *Пусть A — непустое замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$ и b — точка, не принадлежащая A. Тогда точку b можно строго отделить от A.*

Из теоремы Хана — Банаха (КФ, с. 127) выводятся следующие теоремы отделимости в произвольном нормированном пространстве.

Теорема 1′ (первая теорема отделимости). *Пусть X — нормированное пространство. Если множества $A \subset X$*

и $B \subset X$ выпуклы, непусты, не пересекаются между собой и при этом A открыто, то существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$, разделяющий множества A и B (КФ, с. 130; АТФ, с. 124).

Теорема 2′ (вторая теорема отделимости). *Пусть X — нормированное пространство, $A \subset X$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество и $\hat{x} \in X$ — точка, не принадлежащая A. Тогда найдется ненулевой функционал $x^* \in X^*$, строго разделяющий $\hat{x}$ и A, т. е. такой, что* $\sup\limits_{x \in A} \langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \hat{x}\rangle$. (АТФ, с. 126).

Упражнения.

1. Привести пример ограниченной непрерывной функции на ограниченном подмножестве прямой, для которой нижняя и верхняя грани не достигаются.

2. Привести пример ограниченной непрерывной функции на замкнутом подмножестве прямой, для которой нижняя и верхняя грани не достигаются.

3. Пусть X — некоторое подмножество прямой, не являющееся компактом. Доказать, что найдется такая непрерывная на X функция, нижняя грань которой не достигается.

4. Привести пример функции, полунепрерывной снизу, но не непрерывной.

5. Являются ли компактами следующие множества:

а) полуинтервал $[a, b)$;

б) последовательность точек на прямой $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$;

в) подмножество прямой $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n, n + 1/n]$;

г) в пространстве l_2 эллипсоид $Э = \left\{x = \{x_k\}_{k \geqslant 1} \in l_2 \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \leqslant 1\right\}$?

6. Привести пример ограниченного замкнутого множества, не являющегося компактом.

7. Привести пример нормированного пространства X и непрерывного функционала $f\colon X \to \mathbf{R}$ такого, что $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$, но нижняя грань функционала не достигается.

8. Доказать, что в конечномерном пространстве задача о кратчайшем расстоянии от точки до замкнутого множества всегда имеет решение.

9. Привести пример банахова пространства X, его замкнутого подпространства L и точки $\hat{x}$, не принадлежащей этому подпространству, таких, что задача о наикратчайшем расстоянии от точки до подпространства не имеет решения.

10. Отделить точку $(2, 3)$ от эллипсоида $x^2/4+y^2/9=1$.

11. Доказать, что в первой теореме отделимости можно взять выпуклые непустые множества A и B такие, что $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ и $\operatorname{int} A \cap B = \varnothing$.

12. Показать, что в первой теореме отделимости условие открытости отбросить нельзя.

1.3. Леммы. В теории экстремальных задач весьма часто применяются следующие четыре леммы, являющиеся следствиями из теорем отделимости и теоремы Банаха об обратном операторе (КФ, с. 213).

1.3.1. Лемма о нетривиальности аннулятора. Напомним, что *аннулятором* $A^{\perp}$ подмножества A линейного пространства X называется множество тех линейных функционалов l на X, для которых $\langle l, x\rangle = 0$ $\forall x \in A$. Отметим, что $A^{\perp}$ всегда содержит $0 \in X^*$.

Лемма. *Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства X, причем $L \neq X$. Тогда аннулятор $L^{\perp}$ содержит ненулевой элемент* (АТФ, с. 127).

В конечномерном случае эта лемма означает, что если L — собственное подпространство в $\mathbf{R}^n$ (т. е. $L \neq \mathbf{R}^n$), то существуют числа $a_1, \ldots, a_n$, не равные одновременно нулю и такие, что $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in L$.

1.3.2. Лемма о правом обратном операторе. *Пусть X и Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный эпиморфизм X на Y* ($\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$, $\operatorname{Im}\Lambda = Y$). *Тогда существуют отображение M: $Y \to X$ (вообще говоря, нелинейное и разрывное) и константа $C > 0$, удовлетворяющие условиям: $\Lambda M = I_Y$, $\|My\| \leqslant C\|y\|$ для всех $y \in Y$* (АТФ, с. 128).

1.3.3. Лемма о замкнутости образа. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, A: $X \to Y$ и B: $X \to Z$ — линейные непрерывные операторы. Равенство $Cx = (Ax, Bx)$ определяет линейный непрерывный оператор C: $X \to Y \times Z$.

Лемма. *Если подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто в Y и подпространство $B \operatorname{Ker} A$ замкнуто в Z, то подпространство $\operatorname{Im} C$ замкнуто в $Y \times Z$* (АТФ, с. 129).

1.3.4. Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный непрерывный эпиморфизм. Тогда* $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*$ (АТФ, с. 130).

Оператор, являющийся линейным непрерывным эпиморфизмом, называется *регулярным.*

1.4. Определения производных.

1.4.1. Производная Фреше. Пусть $\mathscr{U}$ — окрестность точки $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ в $\mathbf{R}^n$, F — отображение из $\mathscr{U}$ в $\mathbf{R}^m$, $F = (F_1, \ldots, F_m)$. Говорят, что отображение F *дифференцируемо в точке* $\hat{x}$, если существует матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, такая, что

$$F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + \Lambda h + r(h),$$

где

$$\Lambda h = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j} h_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{mj} h_j\right), \quad r(h) = o(|h|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} |r(h)|/|h| = 0, \quad |h| = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^2\right)^{1/2}.$$

Если функция F дифференцируема, то, как легко показать, матрица Λ составлена из частных производных

$$\lambda_{ij} = \left(\frac{\partial F_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Ее обозначают $F'(\hat{x})$. Матрица (2) называется *матрицей Якоби.* Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называют *якобианом* отображения F в точке $\hat{x}$.

Пусть X и Y — нормированные пространства, $\mathscr{U}$ — окрестность точки $\hat{x}$. Отображение $F\colon \mathscr{U} \to Y$ называют *дифференцируемым по Фреше в точке* $\hat{x}$ и пишут $F \in D(\hat{x})$, если существуют линейный непрерывный оператор Λ из X в Y ($\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$) и отображение r некоторой окрестности $\hat{x}$ в Y такие, что

$$\begin{gathered} F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + \Lambda h + r(h), \\ \|r(h)\| = o(\|h\|). \end{gathered} \tag{1$'$}$$

Оператор Λ называется *производной Фреше* и обозначается $F'(\hat{x})$. Соотношения (1′) можно кратко записать так:

$$F(\hat{x}+h)=F(\hat{x})+F'(\hat{x})[h]+o(h),$$

понимая $o(h)$ как элемент пространства Y, для которого $\|o(h)\|=o(h)$ при $\|h\|\to 0$. Через $F'(\hat{x})[h]$ обозначено значение отображения $F'(\hat{x})$ на элементе h. Если в каждой точке x из открытого множества $\mathcal{U}$ отображение $F\in D(x)$ и отображение $x\to F'(x)$ непрерывно, то мы пишем $F\in C^1(\mathcal{U})$.

1.4.2. Строгая дифференцируемость. Пусть отображение F дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{x}$. Оно называется *строго дифференцируемым в точке* $\hat{x}$ (при этом пишут $F\in SD(\hat{x})$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам $\|x_1-\hat{x}\|<\delta$, $\|x_2-\hat{x}\|<\delta$, выполнено неравенство

$$\|F(x_1)-F(x_2)-F'(\hat{x})[x_1-x_2]\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|.$$

Уже в одномерном случае $SD(\hat{x})\neq D(\hat{x})$ (см. упр. 5).

1.4.3. Вариация по Лагранжу и производная по Гато. Пусть снова X и Y — нормированные пространства, $\mathcal{U}$ — окрестность точки $\hat{x}$ в X, $\mathcal{U}\in\mathcal{O}(\hat{x}, X)$, F: $\mathcal{U}\to Y$. Говорят, что F *имеет в точке* $\hat{x}$ *вариацию по Лагранжу*, если для любого $h\in X$ существует предел

$$\delta F(\hat{x},h)=F'(\hat{x},h)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(\hat{x}+\lambda h)-F(\hat{x})}{\lambda}. \qquad (1)$$

При этом отображение $h\to\delta F(\hat{x}, h)$ называют *вариацией по Лагранжу*. Если существует такой оператор $\Lambda\in\mathcal{L}(X, Y)$, что $\delta F(\hat{x}, h)=\Lambda h$, то говорят, что F *дифференцируемо по Гато в точке* $\hat{x}$. Тогда оператор Λ называется *производной Гато отображения F в точке* $\hat{x}$ и обозначается $F'_{\Gamma}(\hat{x})$. Таким образом, если F дифференцируемо по Гато в точке $\hat{x}$, то для любого фиксированного h

$$F(\hat{x}+\lambda h)=F(\hat{x})+\lambda F'(\hat{x})[h]+r(\lambda), \qquad (2)$$

где $\|r(\lambda)\|=o(\lambda)$ при $\lambda\to 0$.

Ясно, что из дифференцируемости по Фреше следует дифференцируемость по Гато. Уже в двумерном случае эти два понятия различаются (см. упр. 4). Из дифференцируемости по Гато по определению вытекает существование первой вариации по Лагранжу. И снова (уже в двумерном случае) эти понятия различны (см. упр. 3).

1.4.4. Производные высших порядков. Пусть $\mathscr{U}$ — окрестность точки $\widehat{x}=(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ в $\mathbf{R}^n$, $f\colon \mathscr{U} \to \mathbf{R}$ — функция, определенная и непрерывно дифференцируемая на $\mathscr{U}$. Говорят, что функция f *дважды дифференцируема в точке* $\widehat{x}$, если существует квадратичная форма Q такая, что

$$f(\widehat{x}+h)=f(\widehat{x})+f'(\widehat{x})[h]+\frac{1}{2}Q(h)+r(h),$$

где $r(h)=o(|h|^2) \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}(|r(h)|/|h|^2)=0.$

Квадратичная форма определяется симметричной матрицей (q_{ij}), $i, j=1, \ldots, n$, которая составлена из частных производных $\frac{\partial^2 f(\widehat{x})}{\partial x_i \partial x_j}$.

Переходим к бесконечномерному случаю. Пусть X и Y — нормированные пространства, $\mathscr{U}\subset X$ — открытое подмножество. Если отображение $f\colon \mathscr{U}\to Y$ дифференцируемо в каждой точке $x \in \mathscr{U}$, то определено отображение $x \to f'(x)$ множества $\mathscr{U}$ в пространство $\mathscr{L}(X, Y)$. Поскольку $\mathscr{L}(X, Y)$ также является нормированным пространством, то можно ставить вопрос о существовании *второй производной*

$$f''(x)=(f')'(x)\in \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y)).$$

Для $h_1 \in X$ $f''(x)[h_1]\in\mathscr{L}(X, Y)$. Возьмем $h_2\in X$; тогда определено $f''(x)[h_1, h_2]=f''(x)[h_1][h_2]$. Таким образом, определено линейное по каждому аргументу отображение $f''(x)\colon X\times X \to Y$. Аналогично определяются производные высших порядков.

Теорема (о смешанных производных). *Если для отображения $f\colon \mathscr{U}\to Y$ существует вторая производная $f''(\widehat{x})$, то для всех $h_1, h_2 \in X$*

$$f''(\widehat{x})[h_1, h_2]=f''(\widehat{x})[h_2, h_1]$$

(АТФ, с. 156).

Упражнения.

1. Привести пример непрерывного отображения, не имеющего в фиксированной точке производной ни по какому направлению.

2. Привести пример отображения, имеющего производную по любому направлению, но не имеющего вариации по Лагранжу.

3. Привести пример отображения, имеющего вариацию по Лагранжу, но не имеющего производной по Гато.

4. Привести пример отображения, имеющего производную по Гато, но не имеющего производной по Фреше.

5. Привести пример отображения, имеющего производную по Фреше, но не строго дифференцируемого.

1.5. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Приведем несколько теорем, наиболее часто используемых для решения экстремальных задач.

1.5.1. Теорема о суперпозиции. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, $\mathcal{U}$ — окрестность точки $\hat{x}$ в X, $\mathcal{V}$ — окрестность точки $\hat{y}$ в Y, $\varphi(\hat{x})=\hat{y}$, $\psi\colon \mathcal{V}\to Z$, $f=\psi\circ\varphi\colon \mathcal{U}\to Z$ — суперпозиция отображений φ и ψ.*

Тогда, если ψ дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{y}$, а φ в точке $\hat{x}$ дифференцируемо по Фреше (дифференцируемо по Гато, имеет вариацию по Лагранжу), то f обладает в точке $\hat{x}$ тем же свойством, что и φ, и при этом соответственно

$$f'(\hat{x})=\psi'(\hat{y})\circ\varphi'(\hat{x}),$$

$$f'_{\Gamma}(\hat{x})=\psi'(\hat{y})\circ\varphi'_{\Gamma}(\hat{x}).$$

$$\delta f(\hat{x},h)=\psi'(\hat{y})[\delta\varphi(\hat{x},h)]\quad\forall h\in X.$$

Если ψ строго дифференцируемо в $\hat{y}$, а φ строго дифференцируемо в $\hat{x}$, то f строго дифференцируемо в $\hat{x}$ (АТФ, с. 144).

Теорема о суперпозиции не имеет, вообще говоря, места, если ψ дифференцируемо лишь по Гато.

1.5.2. Формула Тейлора. *Если $f^{(n)}(\hat{x})$ существует, то*

$$f(\hat{x}+h)=f(\hat{x})+f'(\hat{x})[h]+\frac{1}{2}f''(\hat{x})[h,h]+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})[h,\dots,h]+r(h),$$

где $\|r(h)\|=o(\|h\|^n)$ при $h\to 0$ (АТФ, с. 159).

1.5.3. Конечномерные теоремы об обратной и неявной функции. Теорема Люстерника. Теорема о касательном пространстве.

Теорема (конечномерная теорема об обратной функции). *Пусть $\mathcal{U}\subset\mathbf{R}^n$ — окрестность точки $\hat{x}=(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$, $F\colon\mathcal{U}\to\mathbf{R}^n$ — отображение класса $C^1(\mathcal{U})$, $F(\hat{x})=\hat{y}$. Тогда,* *если якобиан отображения F в точке $\hat{x}$ отличен от нуля, то существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $K > 0$, что для любого y из шара $|y - y| < \delta$ существует единственное x в шаре $|x - \hat{x}| < \varepsilon$ такое, что $F(x) = y$ и при этом $|x - \hat{x}| \leqslant \leqslant K|y - \hat{y}|$.*

Замечание. Мы привели теорему об обратной функции в той форме, в которой она будет в дальнейшем у нас использоваться. Обычно доказывают больше, в частности, что гладкость обратного отображения будет такая же, как и гладкость прямого, и формулу $(F^{-1}(y))' = (F'(F^{-1}(y)))^{-1}$.

Следствие (конечномерная теорема о неявной функции). *Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^s$ — окрестность точки $(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_s)$, $\Psi\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}^s$, $\Psi(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, $\Psi_y(\hat{x}, \hat{y})$ — обратимая матрица. Тогда существуют $K > 0$, $\delta > 0$ и такое отображение $\varphi\colon \mathring{B}(\hat{x}, \delta) \to \mathbf{R}^s$ класса $C^1(\mathring{B}(\hat{x}, \delta))$, что*

$$\Psi(x, \varphi(x)) = 0,\ \varphi(\hat{x}) = \hat{y},\ |\varphi(x) - \hat{y}| \leqslant K|x - \hat{x}|.$$

◁ Положим $n = k + s$, $z = (x, y)$ $(x \in \mathbf{R}^k,\ y \in \mathbf{R}^s)$, $F(z) = (x, \Psi(z))$. Тогда функция F в точке $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$ будет удовлетворять требованиям теоремы об обратной функции, ибо

$$F'(\hat{z}) = \begin{bmatrix} I & \Psi_x(\hat{z}) \\ 0 & \Psi_y(\hat{z}) \end{bmatrix}$$

есть невырожденная матрица. По теореме об обратной функции существуют такие $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и $K > 0$, что если $|\xi - \hat{x}| + |\eta| < \delta$, то найдется единственная пара (x, y), для которой $|x - \hat{x}| + |y - \hat{y}| < \varepsilon$ и

$$F(x, y) = (\xi, \eta) \Leftrightarrow x = \xi,\ \Psi(x, y) = \eta,$$

$$|x - \hat{x}| + |y - \hat{y}| \leqslant K(|\xi - \hat{x}| + |\eta|).$$

Положив $\eta = 0$, получим, что если $|x - \hat{x}| < \delta$, то имеется единственное $y = \varphi(x)$, $|y - \hat{y}| < \varepsilon$, для которого

$$F(x, \varphi(x)) = (x, 0) \Leftrightarrow \Psi(x, \varphi(x)) = 0,$$

$$|y - \hat{y}| \leqslant K|x - \hat{x}|. \quad ▷$$

Замечание. Из формулы для производной обратной функции немедленно следует, что

$$\varphi'(x) = -[F_y(x, \varphi(x))]^{-1}[F_x(x, \varphi(x))].$$

Теорема Люстерника. *Пусть X, Z — банаховы пространства, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(\hat{x}, X)$, F: $\mathcal{U} \to Z$. Если $F \in SD(\hat{x})$ и $F'(\hat{x})$ является эпиморфизмом, то существуют окрестность $U \subset \mathcal{U}$ точки $\hat{x}$, число $K > 0$ и отображение φ: $U \to X$ такие, что*

$$F(x + \varphi(x)) = F(\hat{x}),$$
$$\|\varphi(x)\| \leqslant K\|F(x) - F(\hat{x})\|.$$

◁ Доказательство этой теоремы основано на модифицированном методе Ньютона.

А) Не ограничивая общности, считаем, что $\hat{x} = 0$ и $F(\hat{x}) = 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\mathring{B}(0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ и

$$\|F(x') - F(x'') - F'(0)(x' - x'')\| \leqslant \frac{1}{2C}\|x' - x''\| \qquad (1)$$

при $\|x'\| < \varepsilon$, $\|x''\| < \varepsilon$ (это возможно, поскольку $F \in SD(\hat{x})$), где константа $C > 1$ взята из леммы о правом обратном операторе (п. 1.3.2) для оператора M, являющегося правым обратным к $F'(0)$. Положим для $x \in U = \mathring{B}(0, \delta)$:

$$\xi_{n+1} = \xi_n - M(F(\xi_n)), \quad n \geqslant 0, \quad \xi_0 = x, \qquad (2)$$

где δ столь мало, что $\|x\| + C\|F(x)\| < \varepsilon/2$ при $\|x\| < \delta$.

Б) Докажем по индукции, что $\|\xi_n\| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant 0$. Очевидно, что $\|\xi_0\| = \|x\| < \varepsilon/2$. При $n = 1$ из (2) и леммы о правом обратном операторе получаем оценку

$$\|\xi_1 - x\| = \|MF(x)\| \leqslant C\|F(x)\|, \qquad (3)$$

откуда $\|\xi_1\| < \varepsilon/2$.

Пусть $\|\xi_i\| < \varepsilon$ при $i = 0, 1, \ldots, k$ $(k \geqslant 1)$. Выведем отсюда, что $\|\xi_{k+1}\| < \varepsilon$. Для $i = 0, 1, \ldots, k$ из (2) имеем

$$F'(0)(\xi_{i+1} - \xi_i) + F(\xi_i) = 0, \qquad (4)$$

откуда

$$\|\xi_{i+1} - \xi_i\| \overset{(2)}{\leqslant} C\|F(\xi_i)\| \overset{(4)}{=} C\|F(\xi_i) - F(\xi_{i-1}) - F'(0)(\xi_i - \xi_{i-1})\| \overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|\xi_i - \xi_{i-1}\| \Rightarrow \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \|\xi_{i+1} - \xi_i\| \leqslant 2^{-i}\|\xi_1 - x\| < 2^{-1-i}\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k. \qquad (5')$$

Отсюда в силу неравенства треугольника получаем

$$\|\xi_{k+1}\| = \|\xi_{k+1} - \xi_k + \xi_k - \xi_{k-1} + \ldots + \xi_2 - \xi_1 + \xi_1\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi_{k+1} - \xi_k\| + \|\xi_k - \xi_{k-1}\| + \ldots + \|\xi_2 - \xi_1\| + \|\xi_1\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы получили, что $\|\xi_{k+1}\| < \varepsilon$, откуда по индукции следует, что $\|\xi_n\| < \varepsilon \ \forall n \geqslant 0$.

В) Из неравенств (5), (5′) следует, что $\|\xi_{n+m} - \xi_n\| \leqslant \|\xi_{n+1} - \xi_n\|\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) \leqslant 2\|\xi_{n+1} - \xi_n\| \leqslant \frac{2}{2^n}\|\xi_1 - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — фундаментальная последовательность и, значит, она сходится в силу банаховости X. Обозначим $\psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$; тогда

$$\|\xi_n - x\| \leqslant \|\xi_n - \xi_{n-1}\| + \|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\| + \ldots + \|\xi_2 - \xi_1\| +$$
$$+ \|\xi_1 - x\| \overset{(5')}{\leqslant} \|\xi_1 - x\|\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots + 1\right) \leqslant 2\|\xi_1 - x\|.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\|\psi(x) - x\| \leqslant 2\|\xi_1 - x\| \overset{(3)}{\leqslant} 2C\|F(x)\| = K\|F(x)\|,$$

причем

$$\|\psi(x)\| \leqslant \|x\| + 2\|\xi_1 - x\| \overset{(3)}{<} \varepsilon.$$

Отсюда и из (1) вытекает, что F непрерывна в точке $\psi(x)$, и поэтому из (4)

$$F(\psi(x)) = \lim_{n\to\infty} F(\xi_n) = -\lim_{n\to\infty} F'(0)(\xi_{n+1} - \xi_n) = 0. \ \triangleright$$

Пусть X — нормированное пространство, M — некоторое его подмножество. Элемент $h \in X$ называется *односторонним касательным* (*полукасательным*) *вектором к множеству M в точке* $\hat{x} \in M$, если существуют $\varepsilon > 0$ и отображение r: $[0, \varepsilon] \to X$ такие, что

а) $\hat{x} + th + r(t) \in M \quad \forall t \in [0, \varepsilon)$;

б) $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to +0$.

Вектор h называется *касательным к множеству M в точке* $\hat{x}$, если векторы h и $-h$ являются односторонними касательными векторами к M в $\hat{x}$. Множество всех касательных векторов к M в точке $\hat{x}$ обозначается $T_{\hat{x}}M$, множество односторонних касательных векторов $T^{+}_{\hat{x}}M$. Очевидно, что $T_{\hat{x}}M$ и $T^{+}_{\hat{x}}M$ — конусы. Если множество $T_{\hat{x}}M$ является подпространством в X, то оно называется *касательным пространством к M в точке $\hat{x}$.*

Во многих случаях, в том числе и представляющих значительный интерес для теории экстремальных задач, множество касательных векторов может быть найдено при помощи такого следствия из теоремы Люстерника.

Теорема (о касательном пространстве). *Пусть X, Z — банаховы пространства, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(\hat{x}, X)$, F: $\mathcal{U} \to Z$, $F \in SD(\hat{x})$ и $F'(\hat{x})$ — эпиморфизм, $M = \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x})\}$. Тогда*

$$T_{\hat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\hat{x}).$$

◁ А) Пусть $h \in T_{\hat{x}}M$, $r(\cdot)$ — отображение из определения касательного вектора. Так как $F \in SD(\hat{x})$, то при малых α

$$F(\hat{x}) = F(\hat{x} + \alpha h + r(\alpha)) = F(\hat{x}) + \alpha F'(\hat{x})[h] + o(\alpha).$$

Отсюда $\alpha F'(\hat{x})[h] + o(\alpha) = 0$ и, значит, $F'(\hat{x})[h] = 0$, т. е $T_{\hat{x}}M \subset \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$.

Б) Пусть $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Положим $r(\alpha) = \varphi(\hat{x} + \alpha h)$, где φ — отображение, построенное в теореме Люстерника. Тогда

$$F(\hat{x} + \alpha h + r(\alpha)) = F(\hat{x}),$$

$$\|r(\alpha)\| = \|\varphi(\hat{x} + \alpha h)\| \leqslant K\|F(\hat{x} + \alpha h) - F(\hat{x})\| = o(\alpha),$$

т. е. $h \in T_{\hat{x}}M$. ▷

Задачи

В задачах 1.1—1.26 исследовать отображения на дифференцируемость по Фреше и найти производные в случае дифференцируемости.

1.1. f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = Ax$, A — матрица порядка $m \times n$.

1.2. (Р) f: $X \to Y$, $f(x) = Ax$, X, Y — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1.3. f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \left(x_1x_2, x_1^2 + x_2^2\right)$, $\hat{x} = (1, 2)$.

1.4. f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

В задачах 1.5—1.9 H — гильбертово пространство.

1.5. $f\colon \mathrm{H} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$, $a \in \mathrm{H}$.

1.6. $f\colon \mathrm{H} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle$.

1.7. (P) $f\colon \mathrm{H} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1.8. $f\colon \mathrm{H}\setminus\{0\} \to \mathrm{H}$, $f(x) = x/\|x\|$.

1.9. $f\colon \mathrm{H} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, A — самосопряженный линейный непрерывный оператор.

1.10. $f\colon \mathscr{L}_2([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$,

$y \in \mathscr{L}_2([0, 1])$.

1.11. $f\colon \mathscr{L}_2([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x^3(t)\, dt$.

1.12. $f\colon \mathscr{L}_2([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = \left(\int\limits_0^1 x(t)\, dt\right)^2$.

1.13. $f\colon \mathscr{L}_2([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = \left(\int\limits_0^1 x^2(t)\, dt\right)^3$.

1.14. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = x(0)$.

1.15. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = x^2(1)$.

1.16. (P) $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = x(0)x(1)$.

1.17. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = |x(0)|$.

1.18. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = e^{x(0)}$.

1.19. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = \sin x(1)$.

1.20. $f\colon C([0, 1]) \to C([0, 1])$, $f(x(\cdot)) = \cos x(\cdot)$.

1.21. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $f(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$,

$\widehat{x}(t) = at^2 + bt + c, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad f'(\widehat{x}(\cdot)) = ?$

1.22. $f\colon C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$, $f(x(\cdot)) = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}$.

1.23. $f\colon C([0, 1]) \to C([0, 1])$, $f(x(\cdot)) = \varphi(t, x(t))$, $\varphi(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}^2)$.

1.24. $f\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$,

$$f(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \varphi(x(t))\, dt, \varphi(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}).$$

1.25. (P) $f\colon C([t_0, t_1]) \to \mathbf{R}$,

$$f(x(\cdot)) = \varphi(x(t_0), x(t_1)), \ \varphi(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}^2).$$

1.26 $f\colon C^1([t_0, t_1]) \to \mathbf{R}$,

$$f(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \ L(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}^3).$$

В задачах 1.27—1.29 указать точки, где функции $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ не дифференцируемы по Фреше.

1.27. $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

1.28. $f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

1.2.9 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

В задачах 1 30—1.37 найти норму линейного непрерывного функционала x^* на пространстве X.

1.30. (P) $X = C([0, 1])$,

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = x(0) + 3\int_0^1 x(t)\,dt - 4x(1).$$

1.31. $X = C([0, 1])$, $\langle x^*, x(\cdot)\rangle = -x(0) + \int_{1/2}^{1} x(t)\,dt$.

1.32. $X = C([0, 1])$,

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int_0^1 x(t)\sin \pi t\,dt - x\left(\frac{1}{2}\right).$$

1.33. $X = C([0, 1])$,

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k x(\tau_k) + \int_0^1 q(t)\,x(t)\,dt,\ 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \tau_n \leqslant 1,\ p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{R},\ q(\cdot) \in C([0, 1]).$$

1.34. $X = l^2$,
$\langle x^*, x\rangle = x_1/2 + x_2/4 + x_3/8 + \ldots + x_n/2^n + \ldots$

1.35. $X = l^2$, $\langle x^*, x\rangle = (x_1 - x_2)/2 + (x_3 - x_4)/4 + \ldots$
$\ldots + (x_{2n-1} - x_{2n})/2^n + \ldots$

1.36. (P) $X = \mathscr{L}_2([0, 1])$, $\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int_0^1 x(t)\sin \pi t\,dt$.

1.37. $X = \mathscr{L}_2([0, 1])$, $\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int_0^{1/2} x(t)\,dt - 2\int_{1/2}^{1} x(t)\,dt$.

1.38. $\Lambda\colon l^2 \to l^2$, $\Lambda x = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $\Lambda^* = ?$

1.39. $\Lambda\colon l^2 \to l^2$, $\Lambda x = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $\Lambda^* = ?$

В задачах 1.40—1.54 найти касательные множества $T_{\hat{x}}M$ или $T_{\hat{x}}^{+}M$ к множеству M в точке $\hat{x}$.

1.40. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathring{\mathbf{R}}_+^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $\hat{x} = (0, 1)$,
$T_{\hat{x}}M$, $T_{\hat{x}}^{+}M = ?$

1.41. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^2_+ \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $\hat{x} = (0, 0)$, $T_{\hat{x}}M$, $T^+_{\hat{x}}M = ?$

1.42. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 = x_2^3\}$, $\hat{x} = (0, 0)$, $T^+_{\hat{x}}M = ?$

1.43. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 \leqslant x_2^3\}$, $\hat{x} = (0, 0)$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.44. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 \geqslant x_2^3\}$, $\hat{x} = (0, 0)$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.45. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$, $\hat{x} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.46. $M = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}$, $\hat{x} = (1, 0, \ldots, 0)$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.47. $M = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.48. $M = \{x(\cdot) \in C^n([0, 1]) \mid x^{(n)}(t) = \hat{x}^{(n)}(t)\}$, $\hat{x} \in C^n([0, 1])$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.49. (P) $M = \left\{x(\cdot) \in C([0, 1]) \,\middle|\, \int\limits_0^1 \sin x(t)\, dt = 2/\pi\right\}$, $\hat{x}(t) = \pi t$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.50. $M = \{x(\cdot) \in C([0, 1]) \mid \sin x(0) = \cos x(1) = 0\}$, $\hat{x}(t) = \pi t/2$, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.51. M — множество рациональных чисел, $T_{\hat{x}}M = ?$

1.52. (P) $M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} \subset \mathbf{R}$, $\hat{x} = 0$, $T^+_{\hat{x}}M = ?$

1.53. $M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\} \subset \mathbf{R}$, $\hat{x} = 0$, $T^+_{\hat{x}}M = ?$

1.54. $M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\right\} \subset \mathbf{R}$, $\hat{x} = 0$, $T^+_{\hat{x}}M = ?$

§ 2. ГЛАДКИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Элементарные задачи.

2.1.1. Постановка гладкой элементарной задачи. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ — функция одной действительной переменной, обладающая некоторой гладкостью, т. е. определенными свойствами дифференцируемости. *Гладкой элементарной задачей без ограничений* называется задача об отыскании экстремумов этой функции:

$$f(x) \to \text{extr}. \qquad (з)$$

Аналогичная задача без ограничений возникает при отыскании экстремумов функционала f, обладающего некоторой гладкостью и определенного в нормированном пространстве X.

2.1.2. Правило решения.

1. Формализовать задачу, т. е. привести ее к виду (з).

2. Выписать необходимое условие $f'(x) = 0$.

3. Найти стационарные точки, т. е. решения уравнения $f'(x) = 0$.

4. Отыскать решение среди стационарных точек или доказать, что решения нет.

2.1.3. Теорема Ферма.

Теорема 1. *Пусть f — функция одного переменного, определенная в некотором интервале, содержащем точку $\widehat{x}$, и дифференцируемая в точке $\widehat{x}$.*

Тогда, если $\widehat{x}$ есть точка локального экстремума функции f, то

$$f'(\widehat{x}) = 0. \tag{1}$$

◁ Допустим, что $\widehat{x} \in \operatorname{loc} \min f$, но $f'(\widehat{x}) = \alpha \neq 0$ и, для определенности, $\alpha < 0$. Задав $\varepsilon = |\alpha|/2$, найдем из определения производной такое $\delta > 0$, что при $0 < |h| < \delta$

$$f(\widehat{x} + h) = f(\widehat{x}) + \alpha h + r(h), \quad |r(h)| < |\alpha| \cdot |h|/2.$$

Тогда для $0 < h < \delta$ получаем

$$f(\widehat{x} + h) = f(\widehat{x}) + \alpha h + r(h) < f(\widehat{x}) + \alpha h + |\alpha| h/2 = \\ = f(\widehat{x}) - |\alpha| h/2 < f(\widehat{x}),$$

т. е. $\widehat{x} \notin \operatorname{loc} \min f$. Полученное противоречие доказывает теорему. Аналогично теорема доказывается для случая $\widehat{x} \in \operatorname{loc} \max f$. ▷

Теорема 1′ (аналог теоремы Ферма для нормированных пространств). *Пусть X — нормированное пространство, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\widehat{x} \in \mathcal{U}$, $f\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ и функционал f имеет вариацию по Лагранжу (дифференцируем по Фреше) в точке $\widehat{x}$.*

Тогда, если $\widehat{x} \in \operatorname{loc} \operatorname{extr} f$, то

$$\delta f(\widehat{x}, x) = 0 \quad \forall x \in X \quad (f'(\widehat{x}) = 0). \tag{1′}$$

◁ Если $\widehat{x} \in \operatorname{loc} \operatorname{extr} f$, то $\forall x \in X$ точка нуль является локальным экстремумом функции одного переменного: $\lambda \mapsto \varphi(\lambda; x) \overset{\text{def}}{=} f(\widehat{x} + \lambda x)$. Пользуясь определением вариации по Лагранжу и соотношением (1), получим $\delta f(\widehat{x}, x)=0$. В силу произвольности x приходим к (1′). Если функционал f дифференцируем по Фреше в точке $\widehat{x}$, то в этой точке он имеет вариацию по Лагранжу. Поскольку $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,extr} f$, то из уже доказанного следует, что эта вариация равна нулю. Отсюда $f'(\widehat{x})=0$ в силу определения дифференцируемости по Фреше (п. 1.4.1). ▷

Из теоремы 1 следует, что если точка $\widehat{x}$ доставляет локальный экстремум дифференцируемой функции нескольких переменных: $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, то все частные производные функции f в точке $\widehat{x}$ обращаются в нуль, т. е.

$$f'(\widehat{x})=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(\widehat{x})}{\partial x_1}=\ldots=\frac{\partial f(\widehat{x})}{\partial x_n}=0.$$

2.1.4. Элементарная задача линейного программирования. В § 4 мы познакомимся с выпуклыми задачами, частный подкласс которых образуют задачи линейного программирования. Здесь будет рассмотрена самая простая из задач этого класса. Она интересна тем, что при ее рассмотрении мы познакомимся с важными условиями экстремума, возникающими в задачах с неравенствами,— *условиями неотрицательности* и *дополняющей нежесткости.*

Элементарной задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \inf, \quad x_i \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n \quad \left(X=\mathbf{R}^n\right). \qquad (3)$$

Теорема. *Для того чтобы точка $\widehat{x}=(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ доставляла абсолютный минимум в задаче* (3), *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены:*

а) *условия дополняющей нежесткости* $a_i\widehat{x}_i=0$, $i=1, \ldots, n$;

б) *условия неотрицательности* $a_i \geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$.

Доказательство этой теоремы совершенно очевидно.

2.2. Гладкая конечномерная задача с ограничениями типа равенств.

2.2.1. Постановка задачи. Пусть $f_i\colon \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$, $i=0, 1, \ldots, m$,— функции n переменных, отображающие пространство $\mathbf{R}^n$ в $\overline{\mathbf{R}}$. *Конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств* называется следующая задача в $\mathbf{R}^n$:

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}; \quad f_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m. \qquad (з)$$

Далее считаем, что все функции f_i обладают определенной гладкостью.

2.2.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

2. Выписать необходимое условие:

$$\mathscr{L}_x(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_{ix_j}(x) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

3. Найти стационарные точки, т. е. допустимые решения уравнений п. 2, в которых не все множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равны нулю. При этом бывает полезно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе в задаче на минимум и равным минус единице или любой другой отрицательной константе в задаче на максимум.

4. Отыскать решение среди всех стационарных точек или доказать, что решения нет.

Замечание. В правиле множителей Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств можно, вообще говоря, не обращать внимания на тип экстремума и, убедившись, что $\lambda_0 \neq 0$, полагать λ_0 равным любой отличной от нуля константе. Для задач, где присутствуют неравенства и включения, знак λ_0 существен.

2.2.3. Правило множителей Лагранжа.

Теорема. *Пусть* $X = \mathbf{R}^n$, $\mathscr{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\widehat{x} \in \mathscr{U}$, $f_i\colon \mathscr{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — *непрерывно дифференцируемые функции в множестве* $\mathscr{U}$ (*условие гладкости*). *Тогда, если* $\widehat{x}$ *есть точка локального экстремума в задаче* (з), *то существует ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *такой, что*

$$\mathscr{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathscr{L}(\widehat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0. \qquad (1)$$

В соотношении (1) $\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ — функция Лагранжа рассматриваемой задачи, а $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — множители Лагранжа.

◁ А) Обозначим через Λ линейное отображение из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^{m+1}$, определяемое соотношением

$$\Lambda x = \left(\langle f_0'(\widehat{x}), x\rangle, \ldots, \langle f_m'(\widehat{x}), x\rangle\right) \Leftrightarrow \Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(\widehat{x})}{\partial x_j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m(\widehat{x})}{\partial x_j} x_j\right).$$

Возможен один из двух случаев: 1) Λ отображает $\mathbf{R}^n$ в собственное подпространство L пространства $\mathbf{R}^{m+1}$; 2) Λ отображает $\mathbf{R}^n$ на все $\mathbf{R}^{m+1}$.

Б) Если реализуется случай 1), то по лемме об аннуляторе в конечномерном пространстве (п. 1.3.1) найдутся числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i y_i = 0 \quad \forall y \in L \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\widehat{x}), x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

и теорема доказана.

В) Покажем, что случай 2) невозможен. Действительно, если образ Λ есть все пространство, то ранг соответствующей этому отображению матрицы $\Lambda = \left(\frac{\partial f_i(\widehat{x})}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ также равен $m+1$. (Этот факт прямо следует из известной в алгебре теоремы Кронекера — Капелли.) Тогда по теореме о ранге существует минор матрицы Λ порядка $(m+1)\times(m+1)$, отличный от нуля. Допустим для определенности, что этим минором является минор, составленный из первых $m+1$ столбцов матрицы Λ:

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_0(\widehat{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_0(\widehat{x})}{\partial x_{m+1}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m(\widehat{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_m(\widehat{x})}{\partial x_{m+1}} \end{bmatrix} = \det M \neq 0.$$

Положим

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{m+1}) = (\Phi_0(x_1, \ldots, x_{m+1}), \ldots, \Phi_m(x_1, \ldots, x_{m+1})) =$$
$$= (f_0(x_1, \ldots, x_{m+1}, \widehat{x}_{m+2}, \ldots, \widehat{x}_n) - f_0(\widehat{x}),$$
$$f_1(x_1, \ldots, x_{m+1}, \widehat{x}_{m+2}, \ldots, \widehat{x}_n), \ldots$$
$$\ldots, f_m(x_1, \ldots, x_{m+1}, \widehat{x}_{m+2}, \ldots, \widehat{x}_n));$$

Φ отображает некоторую окрестность точки $(\widehat{x}_1, \ldots \ldots, \widehat{x}_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ в $\mathbf{R}^{m+1}$ и является (в силу условия гладкости теоремы) непрерывно дифференцируемым отображением в этой окрестности. При этом

$$\det\left(\frac{\partial\Phi_i(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_{m+1})}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,\ldots,m\\ j=1,\ldots,m+1}} = \det M \neq 0.$$

По теореме об обратной функции (п. 1.5.4) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и константа $K > 0$ такие, что $\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ найдется вектор $(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon))$, для которого

$$\Phi(\widehat{x}_1 + x_1(\varepsilon), \ldots, \widehat{x}_{m+1} + x_{m+1}(\varepsilon)) = (\varepsilon, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_0(\widehat{x}_1 + x_1(\varepsilon), \ldots, \widehat{x}_{m+1} + x_{m+1}(\varepsilon), \widehat{x}_{m+2}, \ldots, \widehat{x}_n) - f_0(\widehat{x}) = \varepsilon,$$
$$f_i(\widehat{x}_1 + x_1(\varepsilon), \ldots, \widehat{x}_{m+1} + x_{m+1}(\varepsilon), \widehat{x}_{m+2}, \ldots, \widehat{x}_n) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, m,$$

и при этом $\left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^2(\varepsilon)\right)^{1/2} \leqslant K|\varepsilon|$. Из написанных соотношений сразу следует, что вектор $(\widehat{x}_1 + x_1(\varepsilon), \ldots, \widehat{x}_{m+1} + x_{m+1}(\varepsilon), \widehat{x}_{m+2}, \ldots, \widehat{x}_n)$ является допустимым в задаче (з) и что вектор $(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \widehat{x}$ не доставляет задаче экстремума, ибо вблизи от него существуют допустимые векторы, на которых функционал принимает значения и большие, и меньшие, чем $f_0(\widehat{x})$. $\triangleright$

Замечание. Из соотношения (1) следует, что если векторы $f_1'(\widehat{x}), \ldots, f_m'(\widehat{x})$ линейно независимы, то $\widehat{\lambda}_0 \neq 0$.

2.3. Гладкая задача с равенствами и неравенствами (общий случай).

2.3.1. Постановка задачи. Пусть X, Y — нормированные пространства, $F\colon X \to Y$, $f_i\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. *Гладкой задачей с равенствами и неравенствами* называется задача

$$f_0(x) \to \inf; \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (з)$$

если отображение F и функционалы f_i обладают некоторой гладкостью.

2.3.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x, y^*, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle,$$

где $y^* \in Y^*$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ — множители Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия:

а) стационарности

$$\mathscr{L}_x(\hat{x}, y^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0,$$

где $(F'(\hat{x}))^*$ — оператор, сопряженный к отображению $F'(\hat{x})\colon X \to Y$;

б) дополняющей нежесткости

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

в) неотрицательности

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

3. Найти критические точки, т. е. допустимые точки, удовлетворяющие необходимым условиям п. 2 с множителями Лагранжа λ и y^*, одновременно не равными нулю. При этом бывает полезно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Отыскать решение среди критических точек или доказать, что его нет.

2.3.3. Необходимые условия экстремума.

Теорема. *Пусть X, Y — банаховы пространства (условие банаховости), $\mathscr{U} \subset \mathcal{O}(X)$, $\hat{x} \in \mathscr{U}$, $F\colon \mathscr{U} \to Y$, $f_i\colon \mathscr{U} \to \mathbf{R}$, $f_i \in SD(\hat{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $F \in SD(\hat{x}, Y)$ (условие гладкости) и $F'(\hat{x})X$ замкнуто в Y (ослабленное условие регулярности).*

Тогда, если $\hat{x}$ есть точка локального экстремума в задаче (з), то существуют вектор $\lambda \in \mathbf{R}^{m+1}$ и функционал $y^* \in Y^*$, не равные одновременно нулю и такие, что выполнены условия:

а) *стационарности*

$$\mathscr{L}_x(\hat{x}, y^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0;$$

б) *дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

в) *неотрицательности*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Доказательство см. в АТФ, с. 257, а также п. 4.4.1.

2.4. Примеры.

Пример 1. $f(x) = ax^2 + bx + c \to \operatorname{extr}$ $(a \neq 0)$.

Решение. 1. Применяем правило решения гладких задач без ограничений (п. 2.1.2).

2. Необходимое условие — теорема Ферма: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2ax + b = 0$.

3. $\widehat{x} = -b/(2a)$ — стационарная точка.

4. Если $a > 0$, то $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. По следствию из теоремы Вейерштрасса (п. 1.2.1) решение задачи существует. В силу единственности стационарной точки

$$\widehat{x} = -b/(2a) \in \operatorname{abs\,min}, \quad S_{\min} = c - b^2/(4a), \quad S_{\max} = +\infty.$$

Аналогично,

$$a < 0 \Rightarrow \widehat{x} = -b/(2a) \in \operatorname{abs\,max}, \quad S_{\max} = c - b^2/(4a),$$
$$S_{\min} = -\infty.$$

Пример 2. $x_1^2 + x_2^2 \to \operatorname{extr}$; $x_1^4 + x_2^4 = 1$.

Решение. 1. Применяем правило решения гладких задач с ограничениями типа равенств (п. 2.2.2). Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \lambda_0 \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda_1 \left(x_1^4 + x_2^4 - 1\right)$.

2. Необходимое условие:

$$\mathscr{L}_x = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1^3 = 0, \quad \lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2^3 = 0.$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 \neq 0$, значит, из предыдущих уравнений $x_1 = x_2 = 0$ — точка не является допустимой. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда $\widehat{x}_1 = 0$, $\widehat{x}_2 = \pm 1$, или $\widehat{x}_2 = 0$, $\widehat{x}_1 = \pm 1$, или $\widehat{x}_2 \neq 0$, $\widehat{x}_1 \neq 0$, следовательно, $\widehat{x}_1^2 = \widehat{x}_2^2 = -1/(2\lambda_1)$, т. е. $|\widehat{x}_1| = |\widehat{x}_2| = 2^{-1/4}$.

4. По теореме Вейерштрасса существуют решения задач на минимум и максимум. Рассматривая значения функционала в стационарных точках, получаем

$$S_{\min} = 1, \ \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} \in \operatorname{abs\,min},$$
$$S_{\max} = \sqrt{2}, \ \{(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}), (\pm 2^{-1/4}, \mp 2^{-1/4})\} \in \operatorname{abs\,max}.$$

Пример 3. $x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\inf$; $2x_1-x_2+x_3\leqslant 5$, $x_1+x_2+x_3=3$.

Решение. 1. Применяем правило решения гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств (п. 2.3.2). Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\lambda_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+$$
$$+\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)+\lambda_2(x_1+x_2+x_3-3).$$

2. Необходимые условия:

а) стационарности

$$\mathscr{L}_{x_1}=0\Leftrightarrow 2\lambda_0x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0,$$
$$\mathscr{L}_{x_2}=0\Leftrightarrow 2\lambda_0x_2+\lambda_2-\lambda_1=0,$$
$$\mathscr{L}_{x_3}=0\Leftrightarrow 2\lambda_0x_3+\lambda_2+\lambda_1=0;$$

б) дополняющей нежесткости $\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)=0$;

в) неотрицательности $\lambda_0\geqslant 0$, $\lambda_1\geqslant 0$.

3. $\lambda_0=0\overset{\text{а)}}{\Rightarrow}\lambda_1=\lambda_2=0$ — все множители Лагранжа — нули. Положим $\lambda_0=1/2$. Предположим $\lambda_1\neq 0\overset{\text{б)}}{\Rightarrow}2x_1-x_2+x_3-5=0$. Выражая x_1, x_2 и x_3 из условия а) через λ_1 и λ_2 и подставляя их в уравнения $x_1+x_2+x_3=3$, $2x_1-x_2+x_3-5=0$, получим $\lambda_1=-9/14<0$ — противоречие с условием в). Пусть $\lambda_1=0$. Тогда $x_1=x_2=x_3=1$ — критическая точка.

4. Функция $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ стремится к $+\infty$ при $|x|\to+\infty$, значит, по следствию из теоремы Вейерштрасса (п. 1.2.1) решение задачи существует, а в силу единственности критической точки решением может быть только она. Итак, $\widehat{x}=(1,1,1)\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\min}=3$.

Пример 4. $\langle Ax,x\rangle\to\inf$; $\langle x,x\rangle=1$ $\left(x\in\mathbf{R}^n,\ A=(a_{ij})_{i,j=1}^n\right.$ — симметричная матрица).

Решение. 1. Существование решения $\widehat{x}$ очевидно из теоремы Вейерштрасса, ибо сфера $\mathbf{S}^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x|^2\overset{\text{def}}{=}\langle x,x\rangle=1\}$ компактна. Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\lambda_0\langle Ax,x\rangle+\lambda_1\langle x,x\rangle.$$

2. Необходимое условие:

$$\mathscr{L}_x(x,\lambda_0,\lambda_1)=0\Leftrightarrow\lambda_0Ax+\lambda_1x=0,\qquad\lambda_0\geqslant 0.$$

3. Если $\lambda_0=0$, то $\lambda_1\neq 0$ и, значит, из уравнений п. 2 $\widehat{x}=0$, что противоречит уравнению связи $\langle x,x\rangle=1$. По-

ложим $\lambda_0 = 1$. Тогда $A\hat{x} = -\lambda_1\hat{x}$. Таким образом, решением является собственный вектор матрицы A.

4. Домножив соотношение $A\hat{x} = -\lambda_1\hat{x}$ на $\hat{x}$, получим, что $S_3 = -\lambda_1$; иначе говоря, решением задачи на минимум будет собственный вектор матрицы A, соответствующий наименьшему собственному значению.

2.5. Необходимые условия высших порядков. Достаточные условия.

2.5.1. Одномерный случай в задаче без ограничений.

Теорема 1. *Пусть f — функция одного переменного, определенная в некотором интервале, содержащем точку $\hat{x}$, и дважды дифференцируемая в точке $\hat{x}$.*

Необходимые условия экстремума. *Если $\hat{x}$ есть точка локального минимума (максимума) функции f, то*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) \geqslant 0 \quad (f''(\hat{x}) \leqslant 0).$$

Достаточные условия экстремума. *Если*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) > 0 \quad (f''(\hat{x}) < 0),$$

то $\hat{x}$ — точка локального минимума (максимума) функции f.

◁ Докажем теорему для случая минимума. Случай максимума доказывается аналогично.

Из определения двукратной дифференцируемости следует, что

$$f(\hat{x} + x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})x + \frac{1}{2}f''(\hat{x})x^2 + r(x), \qquad (1)$$

$$r(x)/x^2 \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Необходимость. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} f$, то, во-первых, по теореме Ферма (п. 2.1.3) $f'(\hat{x}) = 0$; во-вторых, существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x| < \delta$ вытекает $f(\hat{x} + x) - f(\hat{x}) \geqslant 0$. Поэтому из формулы (1) $f(\hat{x} + x) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}f''(\hat{x})x^2 + r(x) \geqslant 0$ при $|x| < \delta$. Отсюда

$$f''(\hat{x}) = \lim_{x \to 0} \frac{f(\hat{x} + x) - f(\hat{x})}{x^2} \geqslant 0.$$

Достаточность. Выберем δ настолько малым, чтобы в разложении (1) было $|r(x)| \leqslant \frac{1}{4}f''(\hat{x})x^2$ при $|x| < \delta$.

Тогда в силу условий $f'(\hat{x})=0$ и $f''(\hat{x})>0$ получаем

$$f(\hat{x}+x)-f(\hat{x})=\frac{1}{2}f''(\hat{x})x^2+r(x)\geqslant\frac{1}{4}f''(\hat{x})x^2\geqslant 0.$$

Значит, $\hat{x}\in\operatorname{loc}\min f$. $\triangleright$

В одномерном случае можно дать почти исчерпывающий анализ вопроса о том, является ли данная точка $\hat{x}$ локальным экстремумом или нет.

Теорема 2. *Пусть f — функция одного переменного, определенная в некотором интервале, содержащем точку $\hat{x}$, и n раз дифференцируемая в точке $\hat{x}$.*

Необходимые условия экстремума. *Если $\hat{x}$ есть точка локального минимума (максимума) функции f, то либо $f'(\hat{x})=\ldots=f^{(n)}(\hat{x})=0$, либо*

$$f'(\hat{x})=\ldots=f^{(2m-1)}(\hat{x})=0,\quad f^{(2m)}(\hat{x})>0\ \ (f^{(2m)}(\hat{x})<0)\quad (1)$$

при некотором $m\geqslant 1$, $2m\leqslant n$.

Достаточные условия экстремума. *Если выполняется условие (1), то $\hat{x}$ — точка локального минимума (максимума) функции f.*

$\triangleleft$ По формуле Тейлора для функции, n раз дифференцируемой в точке $\hat{x}$, имеем следующее разложение:

$$f(\hat{x}+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!}x^k+r(x),$$

$$\frac{r(x)}{x^n}\to 0 \text{ при } x\to 0.$$

Необходимость. При $n=1$ необходимое условие экстремума следует из теоремы Ферма (п. 2.1.3). Пусть, далее, $n>1$. Тогда либо $f'(\hat{x})=\ldots=f^{(n)}(\hat{x})=0$, либо $f'(\hat{x})=\ldots=f^{(l-1)}(\hat{x})=0$, $f^{(l)}(\hat{x})\neq 0$, $l\leqslant n$. Возможно одно из двух: l нечетно или l четно. В первом случае положим $\varphi(\xi)=f\left(\hat{x}+\sqrt[l]{\xi}\right)$, $\xi\in\mathbf{R}$. Тогда

$$\varphi(\xi)=f(\hat{x})+\sum_{k=l}^{n}\frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!}\xi^{k/l}+r\left(\sqrt[l]{\xi}\right)$$

$$\left(\frac{r\left(\sqrt[l]{\xi}\right)}{\xi^{n/l}}\to 0,\quad \xi\to 0\right)$$

— дифференцируемая в нуле функция. Поскольку $\hat{x}\in$

$\in \operatorname{loc\,min} f$, то $0 \in \operatorname{loc\,min} \varphi$. По теореме Ферма $\varphi'(0) = f^{(l)}(\hat{x})/l! = 0$. Полученное противоречие показывает, что l должно быть четным: $l = 2m$. Поэтому из формулы Тейлора

$$f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) = \frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!}x^{2m} + r_1(x),$$

$$r_1(x)/x^{2m} \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Так как $f^{(2m)}(\hat{x}) \neq 0$, то отсюда выводим, что $f^{(2m)}(\hat{x}) > 0$ при $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} f$ и $f^{(2m)}(\hat{x}) < 0$ при $\hat{x} \in \operatorname{loc\,max} f$.

Достаточность. Поскольку $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0$, $f^{(2m)}(\hat{x}) \neq 0$, то по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) = \frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!}x^{2m} + r_2(x),$$

$$r_2(x)/x^{2m} \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, если $f^{(2m)}(\hat{x}) > 0$, то $f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) \geqslant 0$ при достаточно малых x, т. е. $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} f$; если $f^{(2m)}(\hat{x}) < 0$, то $f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) \leqslant 0$ при достаточно малых x, т. е. $\hat{x} \in \operatorname{loc\,max} f$. $\triangleright$

2.5.2. Задача без ограничений (общий случай).

Теорема. *Пусть X — нормированное пространство, $\mathcal{U} = \mathcal{O}(\hat{x}, X)$, $f\colon \mathcal{U} \to \overline{\mathbf{R}}$, $f \in D^2(\hat{x})$.*

Необходимые условия экстремума. *Если $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min}\,(\max) f$, то*

$$f'(\hat{x}) = 0, f''(\hat{x})[x, x] \geqslant 0 \quad (f''(\hat{x})[x, x] \leqslant 0) \quad \forall x \in X.$$

Достаточные условия экстремума. *Если $f'(\hat{x}) = 0$ и*

$$f''(\hat{x})[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2 \quad (f''(\hat{x})[x, x] \leqslant -\alpha \|x\|^2) \quad \forall x \in X \qquad (1)$$

при некотором $\alpha > 0$, то $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min}\,(\max) f$.

$\triangleleft$ По формуле Тейлора (п. 1.5.3)

$$f(\hat{x}+x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[x] + \frac{1}{2}f''(\hat{x})[x, x] + r(x),$$

$$\|r(x)\| = o(\|x\|^2).$$

Докажем теорему для случая минимума. Случай максимума аналогичен.

Необходимость. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} f$, то, во-первых, по теореме Ферма (п. 2.1.3) $f'(\hat{x}) = 0$; во-вторых,

$f(\widehat{x}+\lambda x)-f(\widehat{x})\geqslant 0$ при достаточных малых λ. Поэтому в силу формулы Тейлора

$$f(\widehat{x}+\lambda x)-f(\widehat{x})=\frac{\lambda^2}{2}f''(\widehat{x})[x,\ x]+r(\lambda x)\geqslant 0$$

при малых λ. Отсюда $f''(\widehat{x})[x,x]\geqslant 0\ \forall x\in X$.

Достаточность. Так как $f'(\widehat{x})=0$, то по формуле Тейлора в силу условия $f''(\widehat{x})[x,\ x]\geqslant\alpha\|x\|^2$ имеем

$$f(\widehat{x}+x)-f(\widehat{x})=\frac{1}{2}f''(\widehat{x})[x,x]+r(x)\geqslant\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+r(x)\geqslant 0$$

при достаточно малых x. Следовательно, $\widehat{x}\in\operatorname{loc\,min}f$. $\triangleright$

Неотрицательная определенность второй производной для функций n переменных означает неотрицательную определенность матрицы $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)$. Условие (1) называется условием *строгой положительности* (*отрицательности*) второй производной в смысле Фреше функционала f.

Отметим, что в конечномерных пространствах условие положительной определенности матрицы $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)$, т. е. условие

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j>0\quad\forall h=(h_1,\ \ldots,h_n)\in\mathbf{R}^n,\quad h\neq 0,$$

гарантирует строгую положительность второго дифференциала (и значит, является достаточным условием минимума в стационарной точке). В бесконечномерных пространствах это не так (пример см. в АТФ, с. 242).

Положительная и отрицательная определенности матрицы устанавливаются с помощью критерия Сильвестра.

Теорема (критерий Сильвестра). *Матрица A является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры* $\det A_k$, *где* $A_k=(a_{ij})_{i,j=1}^k$, $k=1,\ldots,n$, *положительны* $((-1)^k\det A_k>0,\ k=1,\ \ldots,\ n)$.

Доказательство этого утверждения приведено в п. 12.1.2.

2.5.3. Гладкая задача с ограничениями типа равенств.

Теорема. *Пусть X — банахово пространство,* $\mathcal{U}\in\mathcal{O}(\widehat{x},\ X)$, $f_i\colon\ \mathcal{U}\to\mathbf{R}$, $f_i\in D^2(\widehat{x})\cap SD(\widehat{x})$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, *векторы* $f_i'(\widehat{x})$, $i=1,\ \ldots,\ m$, *линейно независимы.*

Необходимые условия экстремума. *Если* $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$ *в задаче*

$$f_0(x) \to \inf; \quad f_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m, \tag{з}$$

то для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *найдется вектор* $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *такой, что*

$$\mathscr{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0, \quad \mathscr{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda)[x, x] \geqslant 0$$

$$\forall x \in L = \{x \in X \mid \langle f_i'(\widehat{x}), x \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m\}.$$

Достаточные условия экстремума. *Если существует вектор* $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *такой, что выполнено соотношение* (1) *и для некоторого* $\alpha > 0$

$$\mathscr{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda)[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in L, \quad x \neq 0,$$

то $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$.

(Более общий результат см. в АТФ, с. 287, и далее в п. 4.4.5.)

2.6. Примеры.

Пример 1. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2 \to \operatorname{extr}$.

Решение. 1. Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$, а из следствия теоремы Вейерштрасса вытекает, что минимум в задаче достигается.

2. Необходимое условие — теорема Ферма: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x_1^3 = x_1 + x_2, \; 2x_2^3 = x_1 + x_2$.

3. Решая эти уравнения, находим стационарные точки $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

4. Выпишем матрицы вторых производных в этих точках:

$$A(\widehat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\widehat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2_{i,j=1} = \begin{bmatrix} 12\widehat{x}_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12\widehat{x}_2^2 - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = A(0, \quad 0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A(1, \quad 1) = A(-1, -1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Матрица $-A_1$ является неотрицательно определенной, значит, точка $(0, 0)$ удовлетворяет необходимому условию второго порядка на максимум, но непосредственное рассмотрение функции f вблизи этой точки показывает, что

$(0,0)\notin \mathrm{loc\,extr}$. Матрица A_2 является положительно определенной, следовательно, по достаточному условию точки $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ являются точками локального минимума, а поскольку минимум существует, то они доставляют и глобальный минимум.

Ответ. $(0, 0)\notin \mathrm{loc\,extr}$; $\{(1, 1), (-1, -1)\}\in \mathrm{abs\,min}$.

Пример 2. $f(x)=\langle Ax, x\rangle+\langle b, x\rangle+c\to \mathrm{extr}$ ($A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — обратимая симметричная матрица).

Стационарная точка здесь одна: $f'(\hat{x})=0 \Leftrightarrow A\hat{x}+b = 0 \Leftrightarrow \hat{x}=-A^{-1}b$. Применяем достаточные условия. Имеем $f''(\hat{x})[h, h]=2\langle Ah, h\rangle$. Значит, для того, чтобы выполнялось $\hat{x}\in \mathrm{loc\,min}$ необходимо, чтобы матрица A была неотрицательно определена ($A\geqslant 0$). Но по условию A обратима, т. е. $\hat{x}\in \mathrm{loc\,min}\Rightarrow A>0$. С другой стороны, если $A>0$, то для некоторого $\alpha>0$ $\langle Ax, x\rangle\geqslant \alpha\|x\|^2$ и, значит, $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)=\infty$. Тогда по теореме Вейерштрасса минимум существует и, следовательно, $\hat{x}\in \mathrm{abs\,min}$. Аналогично доказывается, что $\hat{x}\in \mathrm{abs\,max}\Leftrightarrow A<0$.

2.7. О методе Ньютона. Для того чтобы решить задачу без ограничений, нужно найти стационарные точки, т. е. решения уравнения $F'(x)=0$. Для решения таких уравнений существует один замечательный прием, принадлежащий Ньютону. Метод Ньютона рекуррентный. Для числовой функции $F\colon (a, b)\to \mathbf{R}$ он состоит в том, что последовательные приближения ищутся по формуле

$$x_{n+1}=x_n-(F'(x_n))^{-1}F(x_n),\quad n\geqslant 0, \tag{1}$$

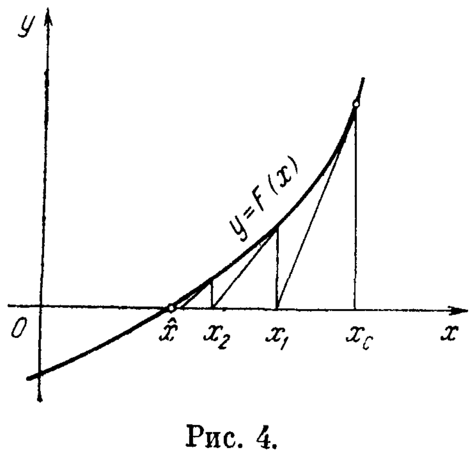

Рис. 4.

где за нулевое приближение берется некоторая достаточно близкая к корню $\hat{x}$ точка x_0. Геометрический смысл этого метода иллюстрирует рис. 4.

Метод Ньютона может быть перенесен на уравнения в банаховых пространствах. Для отображения F окрестности $\mathcal{U}$ банахова пространства X в банахово пространство Y можно написать соотношения, являющиеся полным аналогом соотношений (1); следует лишь под $(F'(x_n))^{-1}$

понимать оператор, обратный к оператору $F'(x_n)$. Однако вычисление $(F'(x_n))^{-1}$ в бесконечномерном случае обычно бывает весьма трудоемким делом. Поэтому в бесконечномерном (да и в конечномерном также) случае при решении операторных уравнений пользуются *модифицированным методом Ньютона*. Видоизменение состоит в том, что вместо последовательности (1) рассматривают последовательность, определяемую формулой

$$x_{n+1} = x_n - (F'(\xi_0))^{-1}F(x_n), \quad n \geqslant 0. \tag{2}$$

Здесь, как мы видим, участвует лишь один обратный оператор $(F'(\xi_0))^{-1}$, $\xi_0 \in \mathcal{U}$. Модифицированным методом Ньютона мы пользовались при доказательстве теоремы Люстерника. Некоторые подробности о методе Ньютона содержатся в КФ, § 3 гл. X.

Задачи

Решить задачи 2.1—2.20.

2.1. $x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to \text{extr}$.

2.2. $xy + 50/x + 20/y \to \text{extr}$.

2.3. $x^2 - y^2 - 4x + 6y \to \text{extr}$.

2.4. $5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to \text{extr}$.

2.5. $3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}$.

2.6. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \to \text{extr}$.

2.7. $3x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 \to \text{extr}$.

2.8. $4x + 3y \to \text{extr}$; $x^2 + y^2 = 1$.

2.9. $x^2 + y^2 \to \text{extr}$; $3x + 4y = 1$.

2.10. $e^{xy} \to \text{extr}$; $x + y = 1$.

2.11. $5x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}$; $x + y = 1$.

2.12. $3x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}$; $x + y = 1$.

2.13. $xy^2z^3 \to \text{extr}$; $x + y + z = 1$.

2.14. $xyz \to \text{extr}$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

2.15. $xyz \to \text{extr}$; $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

2.16. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to \text{extr}$; $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leqslant 1$.

2.17. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \to \text{extr}$; $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1$.

2.18. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \text{extr}$; $8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 40$, $-2x_1 + x_2 - x_3 = -3$, $x_2 \geqslant 0$.

2.19. $e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \to \text{extr}$; $x_1 + x_2 \leqslant 1$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

2.20. $3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \text{extr}$; $x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leqslant 0$, $5x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2$, $x_3 \geqslant 0$.

2.21. (Р) Разделить число 8 на две части так, чтобы произведение их произведения на разность было максимально (задача Тартальи).

2.22. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма длин его катетов равна заданному числу (задача Ферма). (Этой задачей Ферма иллюстрировал свой метод нахождения минимумов — теорему Ферма — в 1638 г.)

2.23. На стороне BC треугольника ABC найти точку E так, чтобы параллелограмм $ADEF$, у которого точки D и F лежат соответственно на сторонах AB и AC, имел наибольшую площадь (задача Евклида). (Это — единственная задача на экстремум в «Началах» Евклида.)

2.24. На некоторой фиксированной грани тетраэдра берется точка, через которую проводятся плоскости, параллельные трем оставшимся граням. Выбрать точку таким образом, чтобы объем полученного параллелепипеда был максимальным (обобщенная задача Евклида).

2.25. Задача о полиноме Лежандра второй степени:

$$\int_{-1}^{1} (t^2 + x_1 t + x_2)^2 \, dt \to \inf.$$

2.26. Задача о полиноме Лежандра третьей степени:

$$\int_{-1}^{1} (t^3 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3)^2 \, dt \to \inf.$$

2.27. Среди всех дискретных случайных величин, принимающих n значений, найти случайную величину с наибольшей энтропией. (*Энтропией* совокупности положительных чисел $p_1, \ldots, p_n$, в сумме равных единице, называется число $H = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$.)

2.28. Найти закон преломления света на плоской границе двух однородных сред, пользуясь принципом Ферма, согласно которому свет из одной точки в другую попадает за кратчайшее время.

2.29. Вписать в круг прямоугольник максимальной площади.

2.30. Вписать в круг треугольник максимальной площади.

2.31. (Р) Среди цилиндров, вписанных в шар единичного радиуса, найти цилиндр с максимальным объемом (задача Кеплера). (Эта задача была поставлена и решена

Кеплером геометрически в «Стереометрии винных бочек» — 1615 г.)

2.32. Вписать в единичный шар конус наибольшего объема.

2.33. Среди конусов, вписанных в шар единичного радиуса, найти конус с максимальной боковой поверхностью.

2.34. Вписать в единичный шар пространства $\mathbf{R}^n$ цилиндр наибольшего объема *) (обобщенная задача Кеплера).

2.35. Вписать в шар пространства $\mathbf{R}^n$ прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

2.36. Вписать в единичный шар пространства $\mathbf{R}^n$ конус наибольшего объема *).

2.37. Вписать в трехмерный шар тетраэдр наибольшего объема.

2.38. (Р) Вписать в шар пространства $\mathbf{R}^n$ симплекс наибольшего объема.

2.39. Среди треугольников данного периметра найти треугольник наибольшей площади.

2.40. Среди всех n-угольников, имеющих заданный периметр, найти n-угольник наибольшей площади (задача Зенодора).

2.41. Вписать в круг n-угольник наибольшей площади.

2.42. (Р) Дан круг радиуса единица. На диаметре AB дана точка E, через которую проведена хорда CD. Найти положение хорды, при которой площадь четырехугольника $ACBD$ максимальна. (Задача предлагалась на Всесоюзной математической олимпиаде школьников в 1980 г. в г. Саратове.)

2.43. Найти в треугольнике такую точку, чтобы сумма отношений длин сторон к расстояниям от этой точки до соответствующих сторон была минимальной. (Задача предлагалась на Международной математической олимпиаде школьников в 1981 г. в г. Вашингтоне.)

2.44. (Р) Вписать в круг треугольник с максимальной суммой квадратов сторон.

2.45. (Р) Даны угол и точка внутри него. Через эту точку провести отрезок, имеющий концы на сторонах угла, так, чтобы полученный треугольник имел наименьшую площадь.

---

*) В задачах 2.34 и 2.36 возможны различные формализации, связанные с разным пониманием терминов «цилиндр» и «конус». У нас, далее цилиндр в $\mathbf{R}^n$ — произведение $(n-1)$-мерного шара на ортогональный отрезок, конус в $\mathbf{R}^n$ — выпуклая оболочка $(n-1)$-мерного шара и ортогонального ему отрезка.

2.46. (Р) В задаче 2.45 минимизировать периметр треугольника.

2.47. Найти наибольшую площадь четырехугольника с заданными сторонами.

2.48. (Р) Среди сегментов шаров, имеющих заданную площадь боковой поверхности, найти сегмент наибольшего объема (задача Архимеда).

2.49. На данной прямой найти точку C, чтобы сумма расстояний от C до точек A и B была минимальной (задача Герона).

2.50. Среди всех тетраэдров с данными основанием и высотой найти тетраэдр с наименьшей боковой поверхностью.

2.51. Среди всех тетраэдров с заданными основанием и площадью боковой поверхности найти тетраэдр наибольшего объема.

2.52. Среди всех тетраэдров, имеющих заданную площадь поверхности, найти тетраэдр наибольшего объема.

2.53. На плоскости даны три точки: x_1, x_2 и x_3. Найти такую точку x_0, чтобы сумма квадратов расстояний от x_0 до x_1, x_2, x_3 была минимальной.

2.54. В пространстве $\mathbf{R}^n$ задано N точек: $x_1, \ldots, x_N$ и N положительных чисел: $m_1, \ldots, m_N$. Найти такую точку x_0, чтобы взвешенная сумма с весами m_i квадратов расстояний от x_0 до $x_1, \ldots, x_N$ была наименьшей.

2.55. Решить задачу 2.54 при условии, что искомая точка x_0 принадлежит единичному шару.

2.56. Решить задачу 2.54 при условии, что искомая точка x_0 лежит на единичной сфере.

2.57. Найти расстояние от точки до эллипса. Сколько нормалей можно провести из точки к эллипсу (задача Аполлония)?

2.58. Решить задачу Аполлония для параболы.

2.59. Решить задачу Аполлония для гиперболы.

2.60. Найти расстояние от точки в пространстве $\mathbf{R}^n$ до гиперплоскости.

2.61. (Р) Найти расстояние от точки до гиперплоскости в гильбертовом пространстве.

2.62. Найти расстояние от точки в пространстве $\mathbf{R}^n$ до прямой.

2.63. Найти минимум линейного функционала $l(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ на единичном шаре.

2.64. В эллипс $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям координат.

2.65. В эллипсоид $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема с ребрами, параллельными осям координат.

2.66. На эллипсоиде $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ найти точку, наиболее удаленную от начала координат.

2.67. (Р) Доказать неравенство для средних степенных:

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p}{n}\right)^{1/p}\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^q}{n}\right)^{1/q},$$

$$-\infty<p\leqslant q\leqslant\infty,\quad p\neq 0,\quad q\neq 0.$$

2.68. Доказать неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{1/q},\quad 0<q\leqslant p\leqslant\infty.$$

2.69. Доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)}{n}\quad\forall x_i\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,n.$$

2.70. (Р) Доказать неравенство Гёльдера:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1/q},\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$1\leqslant p.$$

2.71. Доказать неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p},$$

$$1\leqslant p.$$

В задачах 2.72—2.76 методом Ньютона решить уравнения с заданной начальной точкой x_0.

2.72. $e^x-2=0$, $x_0=1$.

2.73. $5x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2+2x_1+x_2+x_3=0$, $x_0=(1,1,1)$.

2.74. $4x_1^2-2x_1x_2+2x_2x_3+3x_2^2+2x_3^2-x_1+x_2-x_3=0$, $x_0=(1,-1,-1)$.

2.75. $6x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2+3x_1-$ $-2x_2+x_3=0, \quad x_0=(2, 1, 1).$

2.76. $(2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2+(x_1-x_2+3x_3)^2=$ $=0, \ x_0=(-1, 1, -1).$

2.77. Вычислить методом Ньютона отрицательный корень уравнения $x^4-3x^2+75x-10\,000=0$ с пятью верными знаками.

2.78. Найти по методу Ньютона наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x=x$ с точностью до 0,00001.

2.79. Вычислить с точностью до 0,0005 единственный положительный корень уравнения $x^5-x-0{,}2=0$.

§ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

3.1. Основные понятия.

3.1.1. Выпуклые множества и функции. Пусть X — вещественное линейное пространство. Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если из условия $x_1, x_2 \in A$ следует, что $[x_1, x_2]=\{x \mid x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \alpha \in [0, 1]\} \subset A$. Пустое множество выпукло по определению. Множество $K \subset X$ называется *конусом*, если из $x \in K$ следует, что $\alpha x \in$ $\in K \ \forall \alpha>0$. Выпуклые конусы — это конусы, являющиеся выпуклыми множествами.

С каждой функцией $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, принимающей значения в расширенной области действительной прямой, связаны два множества:

$$\operatorname{dom} f=\{x \mid f(x)<+\infty\},$$

$$\operatorname{epi} f=\{(\alpha, x) \in \mathbf{R} \times X \mid \alpha \geqslant f(x), \ x \in \operatorname{dom} f\},$$

называемые *эффективным множеством* и *надграфиком* (эпиграфом) функции f.

Функция f называется *выпуклой*, если $\operatorname{epi} f$ — выпуклое множество в $\mathbf{R} \times X$. Функция, у которой $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$ и $f(x)>-\infty \ \forall x$, называется *собственной*. Функцию $p\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ будем называть *выпуклой однородной*, если $\operatorname{epi} p$ — выпуклый конус в $\mathbf{R} \times X$.

Простейшие свойства выпуклых множеств и функций, а также ряд сопутствующих понятий (выпуклая, коническая, линейная и аффинная комбинации и оболочки, выпуклый многогранник, симплекс и т. п.) описаны в АТФ, с. 208—216. Напомним только два обозначения: $\operatorname{conv} A$ — *выпуклая оболочка* и $\operatorname{cone} A$ — *коническая оболочка множества* A.

Пусть X — нормированное пространство, X^* — к нему сопряженное. Пересечение всех выпуклых замкнутых множеств, содержащих данное множество A, называется *выпуклым замыканием* A и обозначается $\overline{\operatorname{conv}} A$. Функция $\bar{f}$, определяемая условием $\operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$, называется *замыканием* f, а функция $\overline{\operatorname{conv}} f$, задаваемая соотношением $\operatorname{epi} \overline{\operatorname{conv}} f = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{epi} f$, называется *выпуклым замыканием* f. Таким образом, $\overline{\operatorname{conv}} f$ есть наибольшая из выпуклых замкнутых функций, не превосходящих f. Функция f называется *замкнутой*, если $\bar{f} = f$.

3.1.2. Основные операторы. Особенность выпуклых объектов состоит в возможности их двойного описания — в основном и сопряженном пространствах. В выпуклом анализе известно несколько преобразований, связанных с такого рода двойными описаниями. Важнейшие среди них — операции сопряжения для функций и конусов, поляры для множеств и субдифференцирования для выпуклых однородных функций.

Преобразованием Лежандра — Юнга — Фенхеля функции f, или *функцией, сопряженной с* f, называется функция на сопряженном пространстве:

$$f^*(x^*) = \sup_x (\langle x^*, x\rangle - f(x)).$$

Функция

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*} (\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*))$$

называется *второй сопряженной к* f. Из определения сопряженной функции следует неравенство $\langle x^*, x\rangle \leqslant f(x) + f^*(x^*)$, называемое *неравенством Юнга.*

Полярой множества A называется следующее множество в X^*:

$$A^0 = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in A\}.$$

При этом $A^{00} = \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant 1 \quad \forall x^* \in A^0\}$.

Сопряженным конусом к конусу K называется конус в X^*:

$$K^* = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K\}.$$

При этом $K^{**} = \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x^* \in K^*\}$.

Субдифференциалом выпуклой однородной функции p называется следующее множество в X^*:

$$\partial p = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant p(x) \quad \forall x \in X\}.$$

Субдифференциалом выпуклой функции f в точке $\widehat{x}$ называется следующее множество в X^*:

$$\partial f(\widehat{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle \leqslant f(x) - f(\widehat{x})\}.$$

Таким образом, если f выпукла и однородна, то $\partial f = \partial f(0)$.

Пусть A — подмножество X. Важную роль в выпуклом анализе играют следующие функции:

а) *индикаторная функция*

$$\delta A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ +\infty, & x \notin A; \end{cases}$$

б) *функция Минковского*

$$\mu A(x) = \begin{cases} 0, & \alpha x \in A \quad \forall \alpha > 0, \\ \infty, & \alpha x \notin A \quad \forall \alpha > 0, \\ \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1} x \in A\} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

в) *опорная функция*

$$sA(x^*) = \sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle.$$

3.2. Основные теоремы и формулы выпуклого анализа. В этом пункте всюду X — нормированное пространство, X^* — его сопряженное.

3.2.1. Теорема инволютивности. Напомним, что оператор называется *инволютивным*, если его квадрат является единичным оператором.

Теорема. а) *Для того чтобы для собственной функции f имело место равенство $f^{**} = f$, необходимо и достаточно, чтобы f была выпукла и замкнута.*

б) *Для того чтобы для непустого множества A имело место равенство $A^{00} = A$, необходимо и достаточно, чтобы A было выпукло, замкнуто и содержало нуль.*

в) *Для того чтобы для непустого конуса K имело место равенство $K^{**} = K$, необходимо и достаточно, чтобы K был выпуклым и замкнутым.*

Утверждение а) называют *теоремой Фенхеля — Моро.*

3.2.2. Двойственность опорной функции и субдифференциала.

Теорема. а) *Для того чтобы для некоторой однородной функции имело место соотношение $s\partial p = p$, необходимо и достаточно, чтобы p была выпуклой и замкнутой.*

б) *Для того чтобы для множества A имело место соотношение $\partial sA = A$, необходимо и достаточно, чтобы A было выпукло и замкнуто.*

3.2.3. Основные формулы субдифференциального исчисления. Обозначим $(f_1 \vee f_2)(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$.

Теорема 1. а) *Пусть f_1 и f_2 — выпуклые функции на X и в некоторой точке $\hat{x}$, где f_2 конечна, функция f_1 непрерывна. Тогда в любой точке $x \in X$ имеет место формула*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

б) *Пусть f_1 и f_2 — выпуклые непрерывные в точке $\hat{x}$ функции на X и $f_1(\hat{x}) = f_2(\hat{x})$. Тогда имеет место формула*

$$\partial(f_1 \vee f_2)(\hat{x}) = \operatorname{conv}(\partial f_1(\hat{x}) \cup \partial f_2(\hat{x})).$$

(Для выпуклых однородных функций $\hat{x} = 0$, а формулы приобретают вид

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 + \partial p_2 \text{ и } \partial(p_1 \vee p_2) = \operatorname{conv}(\partial p_1 \cup \partial p_2).)$$

Утверждение а) называют *теоремой Моро — Рокафеллара*, утверждение б) — *теоремой Дубовицкого — Милютина*. Этот последний результат допускает значительное усиление, принадлежащее в окончательной форме В. Л. Левину.

Теорема 2 (об очистке). *Пусть T — компакт, $(t, x) \to f(t, x)$ — функция на $T \times \mathbf{R}^n$, выпуклая и замкнутая по x при каждом t, полунепрерывная сверху по t при каждом $x \in R^n$ и такая, что функция $x \to f(t, x)$ непрерывна в $\hat{x}$ при любом $t \in T$. Положим $f(x) = \max\limits_t f(t, x)$, $T_0(x) = \{t \in T \mid f(x) = f(t, x)\}$. Тогда всякий элемент $y \in \partial f(\hat{x})$ представим в виде $y = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$, где $r \leqslant n+1$, $\alpha_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, $y_i \in \partial_x f(t_i, \hat{x})$ (субдифференциал по x), $t_i \in T_0(\hat{x})$, $i = 1, \ldots, r$.*

3.2.4. Основные формулы выпуклого анализа. Исчисление выпуклых множеств и функций включает в себя ряд формул, связывающих введенные в п. 3.1.2 преобразования с операциями над множествами и функциями. Определим сначала некоторые наиболее употребительные операции.

Операции над функциями.

1) Сумма: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

2) Конволюция: $(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\}$.

3) Максимум: $(f_1 \vee f_2)(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$.

4) Выпуклая оболочка минимума: $(f_1 \operatorname{conv} \wedge f_2)(x) = \min\{\alpha f_1(x_1) + (1-\alpha) f_2(x_2) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x\}$.

Операции над множествами.

1) Сумма: $A_1 + A_2 = \{x \mid x = x_1 + x_2, \ x_1 \in A_1, \ x_2 \in A_2\}$.

2) Конволюция: $A_1 \boxplus A_2 = \bigcup\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} (\alpha A_1 \cap (1-\alpha) A_2)$.

3) Выпуклая оболочка объединения: $A_1 \operatorname{conv} \cup A_2 = \operatorname{conv}(A_1 \cup A_2)$.

Таблица

$\partial(p_1 + p_2) \cong \partial p_1 + \partial p_2,$	$\partial(p_1 \vee p_2) \cong \partial p_1 \operatorname{conv} \cup \partial p_2,$
$\partial(p_1 \nabla p_2) = \partial p_1 \boxplus \partial p_2,$	$\partial(p_1 \operatorname{conv} \wedge p_2) = \partial p_1 \cap \partial p_2;$
$s(A_1 + A_2) = sA_1 + sA_2,$	$s(A_1 \cap A_2) \cong sA_1 \operatorname{conv} \wedge sA_2 \cong sA_1 \oplus sA_2,$
$s(A_1 \boxplus A_2) \cong sA_1 \nabla sA_2,$	$s(A_1 \operatorname{conv} \cup A_2) = sA_1 \vee sA_2;$
$(A_1 + A_2)^0 = A_1^0 \boxplus A_2^0,$	$(A_1 \cap A_2)^0 \cong A_1^0 \operatorname{conv} \cup A_2^0;$
$(A_1 \boxplus A_2)^0 \cong A_1^0 + A_2^0,$	$(A_1 \operatorname{conv} \cup A_2)^0 = A_1^0 \cap A_2^0;$
$\mu(A_1 + A_2) \cong \mu A_1 \nabla \mu A_2,$	$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu A_1 \vee \mu A_2,$
$\mu(A_1 \boxplus A_2) \cong \mu A_1 + \mu A_2,$	$\mu(A_1 \operatorname{conv} \cup A_2) = \mu A_1 \operatorname{conv} \wedge \mu A_2 \cong \mu A_1 \oplus \mu A_2;$
$(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*,$	$(K_1 \cap K_2)^* \cong K_1^* + K_2^*.$

Мы пишем $=$, если равенство имеет место без дополнительных допущений, и $\cong$, если оно имеет место лишь при некоторых требованиях относительно непрерывности функций или наличия внутренних точек множеств.

4) Пересечение: $A_1 \cap A_2$.

Операции над выпуклыми однородными функциями. Помимо тех операций, которые имеют место для функций, введем еще одну:

$$p_1 \nabla p_2 = \sup\{\alpha p_1 \oplus (1-\alpha) p_2 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

Операции над конусами. Здесь имеются те же операции, что и в случае множеств, но при этом надо иметь в виду, что для конусов конволюция равносильна пересечению, а выпуклая оболочка объединения — сумме.

Результаты, относящиеся к операции сопряжения для функций, выделим в виде теорем, а остальные сведем в таблицу.

Теорема. а) *Пусть f_1 и f_2 — функции на X. Тогда* $(f_1 \oplus f_2)^* = f_1^* + f_2^*$. *Если же f_1 и f_2 — выпуклые соб-*

ственные функции и существует точка $\hat{x}$, в которой f_2 конечна, а f_1 непрерывна, то $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \oplus f_2^*$.

б) *Пусть f_1 и f_2 — функции на X. Тогда $(f_1 \operatorname{conv} \wedge \wedge f_2)^* = f_1^* \vee f_2^*$. Если же f_1 и f_2 выпуклы, конечны и непрерывны на X, то $(f_1 \vee f_2)^* = f_1^* \operatorname{conv} \wedge f_2^*$.*

3.2.5. Доказательство теорем. Все утверждения, сформулированные в этом пункте (за исключением теоремы об очистке), мы редуцируем к теореме о свойствах преобразования Лежандра — Юнга — Фенхеля (пп. 3.2.1 и 3.2.4).

Для удобства полезно обозначить f^* через lf, A^0 — через πA, K^* — через σK. Далее, l, π, σ, ∂, s, μ и δ рассматриваются как *операторы*, действующие на соответствующих объектах. Например, l переводит функции на X (X^*) в функции на X^* (X), π переводит множества из X (X^*) в множества X^* (X), ∂ переводит выпуклые однородные функции на X (X^*) в множества из X^* (X) и т. д.

Приведем несколько простейших формул, связывающих введенные операторы (A — множество, p — выпуклая однородная функция, K — конус):

1. $l\delta A \overset{\text{def}}{=} sA$.
2. $l\mu A = \delta\pi A$.

$$\lhd \quad (l\mu A)(x^*) \overset{\text{def}}{=} \sup_x (\langle x^*, x\rangle - \inf\{\alpha \mid \alpha > 0,\ x/\alpha \in A\}) =$$
$$= \sup_\alpha \sup_{x \in \alpha A} (\langle x^*, x\rangle - \alpha) = \begin{cases} 0, & x^* \in \pi A, \\ +\infty, & x^* \notin \pi A. \end{cases} \rhd$$

3. $0 \in A \Rightarrow sA = \mu\pi A$.

$\lhd$ $0 \in A \Rightarrow sA(x^*) \geqslant 0$. Если $sA(\bar{x}^*) = 0$, то весь луч $\alpha\bar{x}^*$ принадлежит поляре и, значит, $\mu\pi A(\bar{x}^*) = 0$. Пусть $sA(x^*) > 0$. Тогда $\forall\alpha > 0 \Rightarrow sA(x^*/\alpha) = \alpha^{-1} sA(x^*)$, т. е. $sA(x^*) = \inf\{\alpha \mid \langle x^*/\alpha, x\rangle \leqslant 1\ \forall x \in \pi A\} = \mu\pi A(x^*)$ $\rhd$.

4. $lp = \delta\partial p$.

$$\lhd \quad lp \overset{\text{def}}{=} \sup_x (\langle x^*, x\rangle - p(x)) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \langle x^*, x\rangle \leqslant p(x), \quad \forall x, \\ +\infty, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \overset{\text{def}}{=} \delta\,\partial p \ \rhd.$$

5. $\sigma K \overset{\text{def}}{=} -\pi K$.
6. $sK \overset{\text{def}}{=} \delta\sigma K$.
7. $\delta\pi K \overset{\text{def}}{=} sK$.

Пусть A_1 и A_2 — множества в X. Тогда из определений легко выводятся равенства:

8. $\delta(A_1+A_2)=\delta A_1\oplus\delta A_2$.

9. $\delta(A_1\cap A_2)=\delta A_1\vee\delta A_2=\delta A_1+\delta A_2$.

10. $\delta(A_1\operatorname{conv}\cup A_2)=\delta A_1\operatorname{conv}\wedge\delta A_2$.

Запишем теперь символически результаты теорем пп. 3.2.1 и 3.2.4, касающиеся оператора l:

$$l^2f\cong f, \tag{1}$$

$$l(f_1+f_2)\cong lf_1\oplus lf_2, \tag{2}$$

$$l(f_1\oplus f_2)=lf_1+lf_2, \tag{3}$$

$$l(f_1\vee f_2)\cong lf_1\operatorname{conv}\wedge lf_2, \tag{4}$$

$$l(f_1\operatorname{conv}\wedge f_2)=lf_1\vee lf_2. \tag{5}$$

В (2)—(4) мы также пишем $=$, если равенство имеет место без дополнительных допущений, и $\cong$, если нужно наложить некоторые требования относительно непрерывности функций f_1 и f_2. (Утверждение (1) доказано в АТФ, с. 227; см. также [13], с. 186. Утверждения (2)—(5) доказаны в [13], с. 188—194.)

А теперь выведем из выписанных соотношений некоторые из сформулированных теорем, предоставив читателю доказать остальные.

Теорема п. 3.2.1.

$\lhd$ Пункт а) есть теорема Фенхеля — Моро (1). Необходимость пп. б) и в) очевидна. Докажем достаточность.

б) Пусть A выпукло, замкнуто и содержит нуль. Тогда

$$\delta\pi^2A\overset{2.}{=}l\mu\pi A\overset{3.}{=}lsA\overset{1.}{=}l^2\delta A\overset{(1)}{=}\delta A\Rightarrow A^{00}=A. \tag{6}$$

в) Пусть K — выпуклый и замкнутый конус. Тогда

$$\sigma^2K\overset{5.}{=}(-\pi)(-\pi)K=\pi^2K\overset{(6)}{=}K.\ \rhd$$

Теорема 1 п. 3.2.3. Докажем пункт *а*) теоремы для выпуклых однородных функций.

$$\lhd\ \delta(\partial p_1+\partial p_2)\overset{8.}{=}\delta\partial p_1\oplus\delta\partial p_2\overset{4.}{=}lp_1\oplus lp_2\overset{(3)}{\cong}$$
$$\overset{(3)}{\cong}l(p_1+p_2)\overset{4.}{=}\delta\partial(p_1+p_2).\ \rhd$$

Для неоднородных функций результат теоремы 1 п. 3.2.3 следует из того обстоятельства, что для выпуклых функций $\partial f(\hat{x})=\partial p$, где $p(x)=f'(\hat{x},\ x)=\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}(f(\hat{x}+\alpha x)-f(\hat{x}))\alpha^{-1}$ (подробности см. в [13], с. 207, 208).

Докажем теперь несколько формул из таблицы.

А) *Пусть* p_1 *и* p_2 — *две конечные и непрерывные на* X *выпуклые однородные функции. Тогда* $\partial(p_1 \vee p_2) = \partial p_1 \operatorname{conv} \wedge \partial p_2$.

$$\lhd\ \delta\partial(p_1 \vee p_2) \overset{4.}{=} l(p_1 \vee p_2) \overset{(4)}{\cong} lp_1 \operatorname{conv} \wedge lp_2 \overset{4.}{=}$$
$$= \delta\partial p_1 \operatorname{conv} \wedge \delta\partial p_2 \overset{10.}{=} \delta(\partial p_1 \operatorname{conv} \cup \partial p_2).\ \rhd$$

Б) *Пусть* A_1 *и* A_2 *выпуклы и* $\operatorname{int} A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$. *Тогда* $s(A_1 \cap A_2) = sA_1 \oplus sA_2$.

$$\lhd\ s(A_1 \cap A_2) \overset{1.}{=} l\delta(A_1 \cap A_2) \overset{9.}{=} l(\delta A_1 + \delta A_2) \overset{(2)}{\cong}$$
$$\cong l\delta A_1 \oplus l\delta A_2 \overset{1.}{=} sA_1 \oplus sA_2.\ \rhd$$

В) *Пусть* K_1 *и* K_2 — *выпуклые конусы и* $\operatorname{int} K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$. *Тогда* $(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*$.

$$\lhd\ \delta\pi(K_1 \cap K_2) \overset{7.}{=} s(K_1 \cap K_2) \overset{\text{Б)}}{=} sK_1 \oplus sK_2 \overset{7.}{=}$$
$$= \delta\pi K_1 \oplus \delta\pi K_2 \overset{8.}{=} \delta(\pi K_1 + \pi K_2).\ \rhd$$

Остальные формулы доказываются аналогично.

Упражнения.

1. Доказать, что конус K является выпуклым тогда и только тогда, когда из условия $x_1, x_2 \in K$ следует, что $x_1 + x_2 \in K$.

2. Доказать, что для выпуклости собственной функции f необходимо и достаточно, чтобы неравенство Иенсена $f(\alpha x_1 + (1-\alpha x_2)) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ выполнялось $\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

3. Доказать, что функция p является выпуклой однородной на пространстве X тогда и только тогда, когда $p(\alpha x) = \alpha p(x)\ \forall \alpha > 0$, $\forall x \in X$ и $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.

4. Доказать, что не существует выпуклой ограниченной функции, определенной на всей прямой и отличной от константы.

5. Доказать, что любая выпуклая функция, конечная на всей прямой, непрерывна.

6. Доказать, что сопряженная функция является выпуклой и замкнутой.

7. Доказать, что функция, сопряженная к собственной функции, также является собственной.

8. Доказать, что поляра множества $A \subset \mathbf{R}^n$ является выпуклым и замкнутым множеством в $\mathbf{R}^n$.

9. Доказать, что субдифференциал выпуклой однородной функции является выпуклым и замкнутым множеством в $\mathbf{R}^n$.

10. Доказать, что индикаторная функция выпуклого множества является выпуклой.

11. Доказать, что функция Минковского выпуклого множества является выпуклой однородной.

12. Доказать, что опорная функция множества является выпуклой.

13. Показать, что условие выпуклости в п. а) теоремы п. 3.2.4 является существенным.

Задачи

3.1. Выяснить, при каких значениях параметров данные функции являются выпуклыми:

а) $f(x)=ax^2+bx+c$; б) $f(x)=ae^{2x}+be^x+c$;

в) $f(x_1, x_2)=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p}$, $p>0$;

г) $f(x_1, x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$.

3.2. Являются ли выпуклыми следующие функции:

а) $f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$, $x\in(0, 1)$;

б) $f(x)=\inf\{x_1^2+x_2^2 \mid x_1+x_2=x\}$?

3.3. Найти сопряженные функции от следующих функций одного переменного:

а) e^x; б) ax^2+bx+c; в) $|x|^p/p$, $p>0$;

г) $\delta\{0\}$ — индикаторная функция множества $A=\{0\}$;

д) $\delta[a, b]$; е) $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & x>0,\\ +\infty, & x\leqslant 0.\end{cases}$

3.4. Найти сопряженные функции от следующих функций многих переменных:

а) $a_1x_1+a_2x_2+b$;

б) $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$; в) $e^{a_1x_1+a_2x_2}$;

г) δB, где $B=\{(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid |x_1/a_1|^p+|x_2/a_2|^p\leqslant 1\}$, $p>1$;

д) $f(x_1, \ldots, x_n)=\max\{x_1, \ldots, x_n\}$.

3.5. Найти вторые сопряженные функции от следующих функций:

а) $\sqrt{|x|}$; б) $(x^2-1)^2$; в) $\sin x$;

г) $1/x^2$; д) $|x|+|x-a|$; е) $||x|-1|$.

3.6. Найти сопряженную функцию от функции f: $C([0, 1])\to\mathbf{R}$, $f(x(\cdot))=\max\limits_{t\in[0,1]} x(t)$.

3.7. Найти поляры следующих множеств на плоскости:

а) $A=\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$;

б) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$;

в) треугольник с вершинами в точках $(1, 0)$, $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$;

г) $B_p = \{(x_1, x_2) \mid |x_1|^p + |x_2|^p \leqslant 1\}$, $p > 1$;

д) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 \leqslant 1\}$.

3.8. Вычислить субдифференциалы следующих выпуклых однородных функций одной переменной:

а) $|x|$; б) $\max\{x, 0\}$; в) $\max\{-x, 0\}$.

3.9. Вычислить субдифференциалы следующих выпуклых однородных функций многих переменных:

а) $|x| \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$; б) $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$;

в) $\max\limits_{i=1,\ldots,n} x_i$; г) $\max\{0, \langle a, x\rangle\}$, $a \in \mathbf{R}^n$.

3.10. Вычислить субдифференциал следующей выпуклой однородной функции в пространстве $C([0, 1])$: $f(x(\cdot)) = \max\limits_{t\in[0,1]} x(t)$.

3.11. Найти субдифференциал нормы (как выпуклой однородной функции) в нормированном пространстве.

3.12. Найти субдифференциал $\partial f(\hat{x})$ следующих выпуклых функций:

а) $X = \mathbf{R}$, $f(x) = \max\{e^x, 1 - x\}$, $\hat{x} = 0$;

б) $X = C([0, 1])$, $f(x(\cdot)) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $\hat{x}(t) = \sin 3\pi t$.

3.13. Найти функцию Минковского для треугольника с вершинами в точках $(1, 0)$, $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$.

3.14. Найти сопряженную функцию от функции Минковского.

3.15. Привести пример выпуклой замкнутой функции f и точки $\hat{x}$ таких, что $|f(\hat{x})| < \infty$, $\partial f(\hat{x}) = \varnothing$.

3.16. (Р) Доказать, что если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и при этом $f^*(x) = f(x)$, то $f(x) = |x|^2/2$.

3.17. (Р) Доказать, что если поляра множества в евклидовом пространстве совпадает с самим множеством, то это множество является единичным шаром.

3.18. Привести пример выпуклой, но не замкнутой функции.

3.19. Показать на примере, что суперпозиция двух выпуклых функций не всегда выпукла.

3.20. Показать на примере, что сумма двух выпуклых замкнутых функций не всегда является выпуклой замкнутой функцией.

§ 4. ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании.

4.1.1. Постановка задачи. *Задачей выпуклого программирования* (или *выпуклой задачей*) называется следующая экстремальная задача:

$$f_0(x) \to \inf; \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \qquad (з)$$

Здесь f_i: $X \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$,— выпуклые функции (функционалы), отображающие некоторое линейное (не обязательно нормированное) пространство X в расширенную прямую, A — выпуклое подмножество в X.

Поскольку из выпуклости функции f не следует, вообще говоря, выпуклость функции $-f$, то существенно, что (з) — задача не максимизации, а минимизации.

Точка x называется *допустимой* в (з), если $x \in A$ и $f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Лемма. *Пусть X — нормированное пространство. В выпуклой задаче локальный минимум является и глобальным.*

$\lhd$ Пусть $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$. Это означает, что существует окрестность $\mathscr{U}$ точки $\widehat{x}$ такая, что $-\infty < f_0(\widehat{x}) \leqslant f_0(x)$ для любой допустимой точки $x \in \mathscr{U}$. Возьмем произвольную допустимую точку x. Тогда при достаточно малом $\alpha > 0$ вектор $\bar{x} = (1-\alpha)\widehat{x} + \alpha x \in \mathscr{U}$ и является допустимым. Следовательно, по неравенству Иенссена $f_0(\widehat{x}) \leqslant f_0(\bar{x}) \leqslant$ $\leqslant (1-\alpha)f_0(\widehat{x}) + \alpha f(x)$, откуда $f_0(\widehat{x}) \leqslant f_0(x)$. $\rhd$

Поэтому в дальнейшем в выпуклых задачах мы, говоря «минимум», имеем в виду абсолютный минимум.

4.1.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

(Ограничение $x \in A$ в функцию Лагранжа не включается.)

2. Выписать необходимые условия минимума:

а) принцип минимума

$$\min_{x \in A} \mathscr{L}(x, \lambda) = \mathscr{L}(\widehat{x}, \lambda);$$

б) условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

в) условие неотрицательности

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

3. Найти критические точки, т. е. допустимые точки, удовлетворяюшие условиям п. 2. При этом бывает полезно рассмотреть отдельно случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе. Если выполняется *условие Слейтера*, т. е. существует точка $\bar{x} \in A$, для которой $f_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m$, то $\lambda_0 \neq 0$.

4. Если критическая точка найдена при $\lambda_0 \neq 0$, то она является решением задачи. Если она найдена при $\lambda_0 = 0$, то требуется дополнительное рассмотрение того, доставляет она минимум или нет.

Правило решения выписано в соответствии с принципом Лагранжа. Соотношение а) показывает, что необходимые условия минимума функционала в задаче с ограничениями являются необходимыми условиями минимума функции Лагранжа, в которую включены все ограничения, кроме ограничения типа включения. Условия б) и в) являются обычными условиями дополняющей нежесткости и неотрицательности, присущими принципу Лагранжа в задачах с неравенствами (см. § 2).

4.1.3. Теорема Куна — Таккера.

Теорема. 1. *Пусть X — линейное пространство, $f_i\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции на X, A — выпуклое подмножество X.*

Тогда, если $\hat{x}$ является решением задачи выпуклого программирования, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ такой, что выполняются:

а) *принцип минимума для функции Лагранжа*

$$\min_{x \in A} \mathscr{L}(x, \lambda) = \mathscr{L}(\hat{x}, \lambda);$$

б) *условие дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

в) *условие неотрицательности*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

2. *Если $\lambda_0 \neq 0$, то условия* а) — в) *достаточны для того, чтобы допустимая точка $\hat{x}$ была решением задачи.*

3. *Для того чтобы* $\lambda_0 \neq 0$, *достаточно выполнения условия Слейтера, т. е. существования точки* $\bar{x} \in A$, *для которой* $f_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m$ (АТФ, с. 52).

4.1.4. Задачи без ограничений. *Выпуклой задачей без ограничений* называется следующая задача:

$$f(x) \to \inf. \tag{з}$$

Здесь $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ — собственная выпуклая функция, отображающая некоторое линейное пространство X в расширенную прямую.

Теорема (аналог теоремы Ферма). *Для того чтобы точка* $\hat{x}$ *доставляла в задаче* (з) *абсолютный минимум, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$0 \in \partial f(\hat{x}).$$

$\triangleleft$ Необходимость. $\hat{x} \in \mathrm{abs\,min\,з} \Rightarrow f(x) - f(\hat{x}) \geqslant \geqslant 0 = \langle 0, x - \hat{x}\rangle \Rightarrow 0 \in \partial f(\hat{x})$.

Достаточность. $0 \in \partial f(\hat{x}) \Rightarrow f(x) - f(\hat{x}) \geqslant \langle 0, x - \hat{x}\rangle = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \mathrm{abs\,min\,з}$. $\triangleright$

4.2. Теория двойственности.

4.2.1. Двойственность экстремальных задач. В предыдущем параграфе говорилось о том, что выпуклые объекты допускают возможность двойного описания. В частности, это относится и к выпуклому программированию. Основной принцип построения двойственной задачи состоит в следующем. Пусть нам дана задача минимизации

$$f(x) \to \inf, \quad x \in X, \tag{з}$$

где X — некоторое линейное пространство, а $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ — функция на X. Ее включают в класс подобных задач, зависящих от некоторого параметра (который мы обозначим через y), пробегающего другое линейное пространство Y. Иначе говоря, рассматривают серию задач

$$F(x, y) \to \inf, \quad x \in X, \tag{з(y)}$$

где $F\colon X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$, $F(x, 0) = f(x)$.

Функцию F называют *возмущением* f, а серию $\{з(y)\}$ — *возмущением* (з). Разумеется, возмущения можно выбирать самыми разными путями и в зависимости от этого будут получаться различные двойственные задачи. Стараются подобрать возмущение так, чтобы функция F была выпуклой. Численное значение задачи (з(y)) обозначают через $S(y)$ и называют *S-функцией серии* $\{з(y)\}$.

Лемма 1. *Пусть функция* $(x, y)\mapsto F(x, y)$ *выпукла на произведении линейных пространств* X *и* Y. *Тогда* S*-функция* $S(y)=\inf\limits_x F(x, y)$ *также выпукла на* Y.

◁ Это — простое следствие определений; см. АТФ, с. 264. ▷

Предположим теперь, что функция S *замкнута в нуле*, т. е. $S^{**}(0)=S(0)$. Это предположение, разумеется, выполнено не всегда, но очень часто можно опереться на следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* X — *нормированное пространство*, $f\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$.

а) *Для того чтобы собственная выпуклая функция была замкнутой в некоторой точке, достаточно, чтобы она была непрерывной в этой точке.*

б) *Для того чтобы выпуклая функция была непрерывной во внутренней части своей эффективной области, достаточно, чтобы она была конечной в некоторой точке области и ограничена сверху в некоторой окрестности этой точки* (АТФ, с. 219).

Итак, пусть S выпукла и замкнута в нуле. Вычислим сопряженную функцию S^*, предполагая, что X и Y — нормированные пространства, а X^*, Y^* — их сопряженные. Имеем

$$S^*(y^*)\overset{\text{def}}{=}\sup_y(\langle y^*, y\rangle - S(y))=\sup_y(\langle y^*, y\rangle-\inf_x F(x, y))=$$
$$=\sup_y\sup_x(\langle y^*, y\rangle - F(x, y))=\sup_{(x,y)}(\langle y^*, y\rangle - F(x, y))=$$
$$=\sup_{(x,y)}(\langle 0, x\rangle+\langle y^*, y\rangle - F(x, y))\overset{\text{def}}{=}F^*(0, y^*).$$

Отсюда $\quad S(0)=S^{**}(0)\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_{y^*}(-F^*(0, y^*))$.

Таким образом, численное значение (з) оказывается равным численному значению следующей задачи:

$$\varphi(y^*)\to\sup,\quad y^*\in Y^*, \tag{з*}$$

где $\varphi(y^*)=-F^*(0, y^*)$. (з*) называют *двойственной к* (з) по отношению к возмущению $\{з(y)\}$. Мы пришли к следующей схеме:

(з) $f(x)\to\inf$;	$\varphi(y^*)\to\sup$, (з*)
(з(y)) $F(x, y)\to\inf$;	$\Phi(x^*, y^*)=-F^*(x^*, y^*)\to\sup$, (з*($x^*$))
$f(x)=F(x, 0)$,	$\varphi(y^*)=\Phi(0, y^*)$.

Если S выпукла и замкнута в нуле, то значения прямой и двойственной задач совпадают. Зачастую двойственная задача проще исходной, а иногда у двойственной существует решение, в то время как у прямой решения нет. Далее мы применяем описанный метод к общей задаче выпуклого программирования.

Равенства $S(0)=\bar{S}(0)=S^{**}(0)$ основывают обычно на теореме Фенхеля — Моро, о которой говорилось в п. 3.2.1.

4.2.2. Теорема двойственности для задач выпуклого программирования. Пусть X и Y — нормированные пространства, $f_i\colon X\to\bar{\mathbf{R}}$, $i=0, 1, \ldots, m$,— выпуклые функции на X, Λ — линейный непрерывный оператор из X в Y, $A\subset X$ — выпуклое множество, $b\in Y$, $a_i\in\mathbf{R}$, $i=1, \ldots$ $\ldots, m$.

Задачу

$$f_0(x)\to\inf;\quad f_i(x)\leqslant a_i,\quad i=1, \ldots, m,\quad \Lambda x=b,\quad x\in A, \tag{з}$$

включим в семейство задач

$$f_0(x)\to\inf; \tag{з(α, η)}$$

$$f_i(x)+\alpha_i\leqslant a_i,\quad i=1, \ldots, m,\quad \Lambda x+\eta=b,\quad x\in A.$$

Семейство $\{з(\alpha, \eta)\}$ является возмущением задачи $з=з(0, 0)$. Положим

$$F(x;\alpha,\eta)=\begin{cases} f_0(x), \text{ если } f_i(x)+\alpha_i\leqslant a_i,\ \Lambda x+\eta=b,\ x\in A,\\ +\infty \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \tag{1}$$

Тогда $з(\alpha, \eta)$ можно записать в виде элементарной задачи

$$(з(\alpha, \eta))\Leftrightarrow F(x;\ \alpha,\ \eta)\to\inf\ (\text{по } x\in X).$$

Численное значение $з(\alpha, \eta)$, т. е. $\inf f_0(x)$, при указанных ограничениях обозначим через S, $S\colon \mathbf{R}^m\times Y\to\bar{\mathbf{R}}$, и будем называть S-функцией:

$$S(\alpha,\ \eta)=\inf_x F(x;\ \alpha,\ \eta).$$

Лемма 1. *При сделанных выше допущениях функция $F(x;\alpha,\eta)$, определяемая равенством* (1), *выпукла на* $X\times\mathbf{R}^m\times Y$ (АТФ, с. 264).

Отсюда и из леммы 1 предыдущего пункта следует выпуклость S-функции семейства $\{з(\alpha,\eta)\}$.

Лемма 2. *Сопряженная функция к S-функции семейства* $\{з(\alpha,\ \eta)\}$ *имеет вид*

$$S^*(\lambda,\eta^*)=\begin{cases}-\inf\limits_{x\in A}\left(f_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(f_i(x)-a_i)+\langle\eta^*,\Lambda x-b\rangle\right),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\lambda\in\mathbf{R}_+^m,\\ +\infty,\quad \lambda\notin\mathbf{R}_+^m.\end{cases}$$

◁ По определению,

$$S^*(\lambda,\eta^*)=\sup_{(\alpha,\eta)}\left(\langle\lambda,\alpha\rangle+\langle\eta^*,\eta\rangle-\inf_x F(x;\alpha,\eta)\right)=$$

$$=\sup_{(\alpha,\eta,x)}\left(\langle\lambda,\alpha\rangle+\langle\eta^*,\eta\rangle-F(x;\alpha,\eta)\right)\overset{\text{def}}{=}$$

$$=\sup_{\substack{\alpha_i\leqslant a_i-f_i(x)\\ x\in A,\ \Lambda x+\eta=b}}\left(\langle\lambda,\alpha\rangle+\langle\eta^*,\eta\rangle-f_0(x)\right)=$$

$$=\begin{cases}\sup\limits_{x\in A}\left\{-f_0(x)-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(f_i(x)-a_i)-\langle\eta^*,\Lambda x-b\rangle\right\},\ \lambda\in\mathbf{R}_+^m,\\ +\infty,\quad \lambda\notin\mathbf{R}_+^m,\end{cases}$$

что и требовалось. ▷

Таким образом, в соответствии с общим правилом п. 4.2.1 получаем двойственную задачу

$$\varphi(\lambda,\ \eta^*)=\inf_{x\in A}\mathscr{L}(x,\ \eta^*,\ 1,\ \lambda)\to\sup,\quad \lambda\geqslant 0,\quad \eta^*\in Y^*,$$

где $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, $\mathscr{L}(x,\eta^*,1,\lambda)=f_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(f_i(x)-$ $-a_i)+\langle\eta^*,\Lambda x-b\rangle$.

Теорема двойственности. *Если S-функция семейства* $\{з(\alpha,\ \eta)\}$ *непрерывна в точке* $(0,\ 0)$, *то для любых* $(\alpha,\ \eta)\in\operatorname{int}(\operatorname{dom}S)$

$$S(\alpha,\eta)=\sup_{\lambda\geqslant 0,\ \eta^*\in Y^*}\left(\langle\lambda,\ \alpha\rangle+\langle\eta^*,\eta\rangle+\varphi(\lambda,\eta^*)\right).$$

◁ Теорема сразу вытекает из сказанного в предыдущем пункте, а также лемм 1 и 2. ▷

4.3. Линейное программирование. Важным классом выпуклых задач являются задачи *линейного программирования*, в которых ищутся экстремумы линейных функционалов при ограничениях типа равенств и неравенств, задаваемых также линейными функционалами:

$$\langle c,\ x\rangle\to\sup(\inf);\quad Ax\leqslant b\quad (Ax\geqslant b),\quad x\geqslant 0,\qquad (з)$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, A — матрица со столбцами $a^1, \ldots, a^n$, $a^i \in \mathbf{R}^n$, неравенства понимаются как координатные.

Теория задач типа (з) разработана детально и глубоко. О теоремах существования и двойственности для (з) см. АТФ, с. 269—275. Основным методом решения задач линейного программирования является *симплекс-метод*. Теория линейного программирования изложена в книгах [6, 7, 11, 14] и др. В задачнике [12] имеется большое количество задач по линейному программированию.

4.4. Выпуклый анализ и теория экстремальных задач.

4.4.1. Необходимые условия первого порядка в задаче с неравенствами. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \inf; \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad F(x) = 0, \qquad (\text{з})$$

где $f_i\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $F\colon \mathcal{U} \to Y$; $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, X и Y — нормированные пространства. Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle, \; \lambda = (\alpha, y^*) \in \mathbf{R}^{m+1} \times Y^*.$$

Теорема. *Пусть в* (з) X *и* Y — *банаховы пространства,* $f_i \in SD(\widehat{x})$, $F \in SD(\widehat{x}, Y)$ *и* $\operatorname{Im} F(\widehat{x})$ — *замкнутое подпространство. Тогда, если* $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min}$ з, *то существует ненулевой множитель Лагранжа* $\lambda = (\alpha, y^*) \in \mathbf{R}^{m+1} \times Y^*$ *такой, что выполнены*:

а) *условие стационарности* $\mathscr{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0$;

б) *условие дополняющей нежесткости* $\alpha_i f_i(\widehat{x}) = 0$, $i \geqslant 1$;

в) *условие неотрицательности* $\alpha_i \geqslant 0$, $i \geqslant 0$.

◁ Положим $F'(\widehat{x}) = \Lambda$, $f_i'(\widehat{x}) = x_i^*$, $i \geqslant 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f_i(\widehat{x}) = 0$, $i \geqslant 0$. Действительно, если $f_0(\widehat{x}) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\widetilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\widehat{x})$, а если $f_{i_0}(\widehat{x}) < 0$, то это ограничение можно отбросить, ибо если $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min}$ з, то очевидно, что $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min}$ з$_0$, где i_0-е ограничение отброшено. Таким образом, можно считать, что условие дополняющей нежесткости выполнено (следует положить $\lambda_i = 0$ для тех $i \geqslant 1$, для которых $f_i(\widehat{x}) \neq 0$).

А) Вырожденный случай. $\operatorname{Im} A$ есть собственное подпространство Y. Тогда по лемме о нетривиальности аннулятора найдется $y^* \neq 0$ такой, что

$$\langle y^*, \Lambda x\rangle = 0 \quad \forall x \Leftrightarrow \Lambda^* y^* = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_x(\hat{x}, \lambda) = 0,$$

где $\lambda = (0, y^*)$.

Б) Пусть Λ отображает X на Y. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} \langle x_i^*, x\rangle \to \inf; \quad \Lambda x = 0. \qquad (з')$$

Лемма. $0 \in \operatorname{abs\,min} з'$.

⊲⊲ Пусть $0 \notin \operatorname{abs\,min} з'$. Это означает, что имеется элемент $\bar{x}$, для которого $\langle x_i^*, \bar{x}\rangle < 0$, $\Lambda\bar{x} = 0$. Но тогда по теореме Люстерника найдется функция $r(\cdot)$: $[-\lambda_0, \lambda_0] \to X$ такая, что $\|r(t)\|/t \to 0$ при $t \to 0$ и $F(\hat{x} + t\bar{x} + r(t)) \equiv 0$, значит,

$$f_i(\hat{x} + t\bar{x} + r(t)) = t\langle x_i^*, \bar{x}\rangle + o(t) < 0, \quad i \geqslant 0,$$

для достаточно малых t, что противоречит условию, согласно которому $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$. ⊳⊳

В) Результат теоремы следует из цепочки равенств, являющихся следствием теорем выпуклого анализа и леммы об аннуляторе ядра регулярного оператора:

$$0 \in \operatorname{abs\,min} з' \Leftrightarrow 0 \in \partial\left(\max_i \langle x_i^*, x\rangle + \delta\operatorname{Ker}\Lambda\right) =$$

$$= \partial\max\langle x_i^*, x\rangle + \partial\delta\operatorname{Ker}\Lambda = \operatorname{conv}\{x_0^*, \ldots, x_n^*\} + (\operatorname{Ker}\Lambda)^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists y^* \in Y^*, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+^{m+1}, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1, \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0. \ ⊳$$

Следствие. *Пусть при условиях гладкости теоремы оператор $F'(\hat{x})$ сюръективен. Тогда множество множителей Лагранжа* $Л = \left\{\lambda = (\alpha, y^*) \mid \alpha \in \mathbf{R}_+^{m+1}, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1, \sum_{i=0}^m \alpha_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0\right\}$ *является непустым выпуклым компактом.*

⊲⊲ Непустота следует из п. В) доказательства теоремы. Рассмотрим симплекс $\Sigma = \left\{\alpha \in \mathbf{R}_+^{m+1} \mid \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1\right\}$ и отображение φ: $\Sigma \to X^*$, задаваемое формулой $\varphi(\alpha) = \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^*$. По определению, $(\alpha, y^*) = \lambda \in Л \Leftrightarrow \varphi(\alpha) +$

$+\Lambda^* y^* = 0$. В силу замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda^*$ и равенства $\operatorname{Ker}\Lambda^* = \{0\}$

$$(h^* \in \operatorname{Ker}\Lambda^* \Rightarrow \langle \Lambda^* h^*, x\rangle = 0 \quad \forall x \Rightarrow \langle h^*, \Lambda x\rangle = 0 \quad \forall x \Rightarrow h^* = 0).$$

применима теорема Банаха.

По теореме Банаха отображение $\Lambda^*\colon Y^* \to \operatorname{Im}\Lambda^*$ имеет обратное, значит, подмножество $\Lambda^{*-1}\varphi(\Sigma)$ компактно, а значит, компактно и множество $\{(\alpha, y^*) \in Л\} = \{(\alpha, -\Lambda^*\varphi^{-1}(\alpha)) \mid \alpha \in \Sigma\}$. Выпуклость Л очевидна. $\triangleright\triangleright$

4.4.2. Теорема двойственности в задаче о кратчайшем расстоянии. Пусть X — нормированное пространство, $A \subset X$ — непустое выпуклое множество. Величина

$$\rho A(x) = \inf\{\|x - \xi\| \mid \xi \in A\}$$

называется *расстоянием от точки x до множества A*.

Теорема. *Величина $\rho A(x)$ допускает следующее двойственное представление*:

$$\rho A(x) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - sA(x^*) \mid \|x^*\| \leqslant 1\}.$$

$\triangleleft$ Из определения конволюции сразу следует, что $\rho A(x) = (N \oplus \delta A)(x)$, $N(x) = \|x\|$. Применяя теорему Лежандра — Юнга — Фенхеля о преобразовании конволюции и формулу $lN = \delta B^*$, где B^* — шар сопряженного пространства, получаем, что $l\rho = \delta B^* + sA$. Вследствие того, что ρA ограничена сверху и снизу $(0 \leqslant \rho A(x) \leqslant \leqslant \|x - \xi_0\|$, где ξ_0 — произвольная точка из $A)$, функция ρA непрерывна всюду на X, и, значит, по теореме Фенхеля — Моро

$$(\rho A)(x) = l(l\rho)(x) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\langle x^*, x\rangle - sA(x^*) \mid x^* \in B^*\}. \ \triangleright$$

4.4.3. Лемма о сопряженном конусе и лемма Хофмана.

Лемма. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $\Lambda\colon X \to Y$ — линейный сюръективный оператор из X в Y, $x_1^*, \ldots, x_s^*$ — элементы сопряженного пространства X^* и $\exists \bar{x} \in \operatorname{Ker}\Lambda$, $\langle x_i^*, \bar{x}\rangle < 0$ $\forall i$ (условие Слейтера). Пусть*

$$K = \{x \mid \langle x_i^*, x\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s, \ \Lambda x = 0\}.$$

Тогда

$$K^* = \left\{x^* \in X^* \mid x^* + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0,\ \alpha_i \geqslant 0,\ y^* \in Y^*\right\}.$$

◁ Обозначим $\Pi_i = \{x \mid \langle x_i^*, x\rangle \leqslant 0\}$. Тогда $\operatorname{int} \Pi_i \neq \varnothing$ и $K = \bigcap_{i=1}^{s} \Pi_i \cap \operatorname{Ker}\Lambda$. Применив теорему о конусе, сопряженном к пересечению конусов, и лемму об аннуляторе ядра регулярного оператора, получим

$$\sigma\left(\bigcap_{i=1}^{s} \Pi_i \cap \operatorname{Ker}\Lambda\right) = \sum_{i=1}^{s} \sigma\Pi_i + \sigma(\operatorname{Ker}\Lambda) =$$
$$= -\left(\operatorname{conv}\{x_1^*, \ldots, x_n^*\} + \operatorname{Im}\Lambda^*\right). \ \triangleright$$

Замечание. Утверждение леммы верно и без условия Слейтера (см. АТФ, с. 277).

Лемма Хоффмана. *Пусть выполнены те же условия, что и в лемме о сопряженном конусе. Тогда для функции расстояния от точки x до K справедливо неравенство*

$$\rho K(x) \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{s} \langle x_i^*, x\rangle_+ + \|\Lambda x\|\right).$$

◁ Применив формулу об опорной функции пересечения, формулы $s\Pi = \delta \operatorname{cone} x_i$ и формулу конволюции индикаторных функций, получим

$$sK = s\left(\bigcap_{i=1}^{s} \Pi_i \cap \operatorname{Ker}\Lambda\right) = \bigoplus_{i=1}^{s} s\Pi_i \oplus s\operatorname{Ker}\Lambda =$$
$$= \bigoplus_{i=1}^{s} \delta\{\operatorname{cone} x_i^*\} \oplus \delta \operatorname{Im}\Lambda^* =$$
$$= \delta\{x^* \mid x^* \in \operatorname{cone}\{x_1^*, \ldots, x_s^*\} + \operatorname{Im}\Lambda^*\}.$$

Следовательно, по теореме двойственности для ρK получим

$$\rho K(x) = \sup\left\{\langle x^*, x\rangle \mid x^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^*, \alpha_i \geqslant 0, \|x^*\| \leqslant 1\right\}.$$

Подпространство $L = \operatorname{lin}\{x_1^*, \ldots, x_s^*\} + \operatorname{Im}\Lambda^*$ замкнуто как сумма конечномерного пространства и замкнутого, $\operatorname{Im}\Lambda^* = (\operatorname{Ker}\Lambda)^\perp$, аннулятор всегда замкнут. Значит, L банахово. Оператор Λ_1: $\mathbf{R}^s \times Y^* \to L$, $\Lambda_1(\alpha, y^*) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^*$, линеен, непрерывен и сюръективен, отображает $\mathbf{R}^s \times Y^*$ на L. По лемме о правом обратном существует M_1: $L \to \mathbf{R}^s \times Y^*$ такое, что $\Lambda_1 \circ M_1 = I_L$,

$\|M_1x^*\| \leqslant C\|x^*\|$. Тогда, если $\|x^*\| \leqslant 1$, то $\|M_1x^*\|_{\mathbf{R}^s\times Y^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{s}|\alpha_i| + \|y^*\| \leqslant C$. Таким образом, в выражении для ρ можно считать, что $0 \leqslant \alpha_i \leqslant C$, $\|y^*\| \leqslant C$, откуда

$$\rho K(x) \leqslant \sup\left\{\left\langle \sum_{i=1}^{s}\alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^*, x\right\rangle \middle| 0 \leqslant \alpha_i \leqslant C, \|y^*\| \leqslant C\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{s}\langle x_i^*, x\rangle_+ + \|\Lambda x\|\right). \triangleright$$

4.4.4. Лемма о минимаксе. Пусть X и Y — банаховы пространства, Λ: $X \to Y$ — сюръективный оператор, $x_i^* \in X^*$, $i = 1, \ldots, s$, $a \in \mathbf{R}^s$. Определим функцию S: $\mathbf{R}^s \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ равенством

$$S(a, y) = \inf_{\Lambda x + y = 0}\ \max_{1 \leqslant i \leqslant s}\left(a_i + \langle x_i^*, x\rangle\right). \tag{1}$$

Лемма. *Если* $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s}\langle x_i^*, x\rangle \geqslant 0$ *для любого* $x \in \operatorname{Ker}\Lambda$, *то величина* $S(a, y)$ *допускает следующее двойственное представление*:

$$S(a, y) = s\text{Л}(a, y) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i + \langle y^*, y\rangle \,\middle|\, (\alpha, y^*) \in \text{Л}\right\},$$

где

$$\text{Л} = \left\{(\alpha, y^*) \in \mathbf{R}^s \times Y^* \mid \alpha \in \mathbf{R}^s_+, \sum_{i=1}^{s}\alpha_i = 1, \sum_{i=1}^{s}\alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0\right\}.$$

При этом inf *в* (1) *достигается на некотором (быть может, не единственном)* $\widehat{x} = \widehat{x}(a, y)$ *и существует такое* $C > 0$ *(не зависящее от* a, y*), что при подходящем выборе* $\widehat{x}(a, y)$

$$\|\widehat{x}(a, y)\| \leqslant C(|a| + \|y\|).$$

Первая часть легко следует из теорем выпуклого анализа. О второй части см. АТФ, с. 280.

4.4.5. Необходимые условия высших порядков и достаточные условия в задаче с неравенствами. Здесь продолжается исследование задачи п. 4.4.1. При этом далее используются обозначения, введенные ранее: x_i^*, Λ, Л.

Теорема (Левитин — Милютин — Осмоловский). *Пусть в задаче* (з) п. 4.4.1 X *и* Y — *банаховы пространства,* $f_i \in D^2(\mathcal{U})$, $F \in D^2(\mathcal{U}, Y)$ *и* $\operatorname{Im} F'(\widehat{x}) = Y$.

Необходимое условие минимума. *Если* $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$, *то для любого вектора* $h \in K = \{x \mid \langle x_i^*, x\rangle \leqslant 0,\ i = 0, 1, \ldots, m, \Lambda x = 0\}$ *выполнено условие неотрицательности*

$$\max_{\lambda \in Л} \mathscr{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda)[h, h] \geqslant 0.$$

Достаточное условие минимума. *Если* $Л \neq \varnothing$ *и выполнено условие положительности с некоторым* $\alpha > 0$:

$$\max_{\lambda \in Л} \mathscr{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda)[h, h] \geqslant \alpha \|h\|^2 \ \forall h \in K,$$

то $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$.

Непустота множества Л, а также его компактность и выпуклость были доказаны в п. 4.4.1.

◁ Необходимость. Снова считая, что $f_i(\widehat{x}) = 0$, $i \geqslant 0$, рассмотрим задачу

$$f(x) = \max(f_0(x), \ \ldots, \ f_m(x)) \to \inf, \quad F(x) = 0. \qquad (з_1)$$

Лемма. *Если* $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з$, *то* $\widehat{x} \in \operatorname{loc\,min} з_1$.

◁◁ Если $\widehat{x} \notin \operatorname{loc\,min} з_1$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon$: $\|x_\varepsilon - \widehat{x}\| < \varepsilon$,

$F(x_\varepsilon) = 0$, $f_i(x_\varepsilon) < 0$, $i \geqslant 0 \Rightarrow \widehat{x} \notin \operatorname{loc\,min} з$. ▷▷

Пусть $h \in K$. Положим

$$a_i = \frac{1}{2} f_i''(\widehat{x})[h, h], \quad y = \frac{1}{2} F''(\widehat{x})[h, h],$$

$$\Psi(h) = \frac{1}{2} \max_{\lambda \in Л} \mathscr{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda)[h, h].$$

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} (\langle x_i^*, x\rangle + a_i) \to \inf; \quad \Lambda x + y = 0. \qquad (з_2)$$

Вследствие сюръективности оператора Λ и леммы из доказательства теоремы п. 4.4.1 $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m} \langle x_i^*, x\rangle \geqslant 0 \ \forall x \in \operatorname{Ker} \Lambda$, т. е. к задаче ($з_2$) применима лемма о минимаксе. По лемме о минимаксе найдется элемент $\xi = \xi(h)$, обладающий свойствами

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} (\langle x_i^*, \xi\rangle + a_i) = \Psi(h).$$

По формуле Тейлора в силу соотношений $\Lambda h = 0$, $\Lambda \xi +$

$+y=0$ получаем при $t>0$

$$F\left(\hat{x}+th+t^2\xi\right)=F\left(\hat{x}\right)+tF'\left(\hat{x}\right)h+t^2F'\left(\hat{x}\right)\xi+$$
$$+\frac{t^2}{2}F''\left(\hat{x}\right)[h,h]+o(t^2)=o(t^2).$$

Согласно теореме Люстерника существует отображение φ: $U\to X$ окрестности точки $\hat{x}$ такое, что $F(x+\varphi(x))=0$ и, кроме того, $\|\varphi(x)\|\leqslant K\|F(x)\|$. Полагая $r(t)=\varphi(\hat{x}+th+t^2\xi)$, получим:

$$F(\hat{x}+th+t^2\xi+r(t))=0,$$
$$\|r(t)\|\leqslant K\|F(\hat{x}+th+t^2\xi)\|=o(t^2).$$

Тогда, применив формулу Тейлора к f_i и используя (1), получаем (вспомнив, что $\langle x_i^*,h\rangle\leqslant 0,\quad i\geqslant 0$)

$$f\left(\hat{x}+th+t^2\xi+r(t)\right)=\max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(t\langle x_i^*,h\rangle+t^2\left(\langle x_i^*,\xi\rangle+a_i\right)+\right.$$
$$\left.+o(t^2)\right)\leqslant t^2\max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(\langle x_i^*,\xi\rangle+a_i\right)+o(t^2)=t^2\Psi(h)+o(t^2)<0$$

при малых t, если допустить, что $\Psi(h)<0$ в противоречии с леммой. Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что существует $\delta>0$ такое, что условия

$$f_i(\hat{x}+h)\leqslant 0,\quad i\geqslant 0,\quad F(\hat{x}+h)=0 \tag{2}$$

противоречивы при $\|h\|<\delta$, $h\neq 0$. Из этого сразу будет следовать, что $\hat{x}\in\operatorname{loc}\min$ з. Итак, пусть вектор h удовлетворяет условиям (2) и $\|h\|<\delta_1$. Тогда по формуле Тейлора

$$f_i\left(\hat{x}+h\right)=\langle x_i^*,h\rangle+\frac{1}{2}f_i''\left(\hat{x}\right)[h,h]+r_i(h),\quad i\geqslant 0,$$

$$F\left(\hat{x}+h\right)=\Lambda h+\frac{1}{2}F''\left(\hat{x}\right)[h,h]+r(h),$$

и, полагая

$$a_i=\frac{1}{2}f_i''\left(\hat{x}\right)[h,h]+r_i(h),\quad i\geqslant 0,\ y=\frac{1}{2}F''\left(\hat{x}\right)[h,h]+r(h),$$

получим

$$\langle x_i^*,h\rangle+a_i=f_i\left(\hat{x}+h\right)\leqslant 0,\quad i\geqslant 0,\quad \Lambda h+y=0; \tag{3}$$

при этом

$$|a_i|\leqslant C_1\|h\|^2,\quad \|y\|\leqslant C_1\|h\|^2. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу

$$\max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(\langle x_i^*, x\rangle + a_i\right)\to \inf;\quad \Lambda x + y = 0. \tag{з$_3$}$$

Из равенства $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\langle x_i^*, x\rangle + \langle\Lambda^* y^*, x\rangle = 0$, $\alpha_i\geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i = 1$ вытекает, что $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\langle x_i^*, x\rangle = 0$ $\forall x\in \operatorname{Ker}\Lambda$. Отсюда $\max_{0\leqslant i\leqslant m}\langle x_i^*, x\rangle \geqslant 0$ $\forall x\in\operatorname{Ker}\Lambda$, и, значит, к задаче (з$_2$) можно применить лемму о минимаксе. В итоге получим

$$\max_{0\leqslant i\leqslant m} f_i(\hat{x}+h)\overset{(3)}{=}\max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(\langle x_i^*, h\rangle + a_i\right)\geqslant$$

$$\geqslant \min_{\Lambda x + y = 0}\ \max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(\langle x_i^*, x\rangle + a_i\right) =$$

$$= \max_{\lambda\in Л}\left\{\frac{1}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda)[h, h] + \sum_{i=0}^{m}\alpha_i r_i(h) + \langle y^*, \dot{r}(h)\rangle\right\}. \tag{5}$$

Расстояние от h до конуса K оценим по лемме Хоффмана и затем по (4):

$$\rho K(h)\leqslant C_2\left\{\sum_{i=0}^{m}\langle x_i^*, h\rangle_+ + \|\Lambda h\|\right\}\leqslant C_3\|h\|^2$$

(мы воспользовались тем, что если $\langle x_i^*, h\rangle + a_i\leqslant 0$, то $\langle x_i^*, h\rangle_+\leqslant |a_i|$, и равенством $\Lambda h = -y$; см. (3)).

Таким образом, $h = h_1 + h_2$, где $h_1\in K$, а $\|h_2\|\leqslant \leqslant C_3\|h\|^2$. Пусть δ_2 выбрано так, что из $\|h\|\leqslant\delta_2$ следует $C_3\|h\|\leqslant 1/2$. Тогда

$$\|h_1\|\geqslant\|h\| - \|h_2\|\geqslant\|h\|(1 - C_3\|h\|)\geqslant\|h\|/2$$

и, значит,

$$\|h_2\|\leqslant 4C_3\|h_1\|^2. \tag{6}$$

Наконец отметим, что из следствия теоремы п. 4.4.1 вытекает, что если $\lambda\in Л$, то $\|y^*\|\leqslant C_4$. Пусть δ_3 настолько мало, что из $\|h\|\leqslant\delta_3$ следует неравенство

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\alpha_i r_i(h) + \langle y^*, r(h)\rangle\right|\leqslant\frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2. \tag{7}$$

Теперь соединим воедино условия теоремы (2), (5), (6) и (7), обозначив $C_5=\max\limits_{\lambda\in Л}\|\mathscr{L}_{xx}(\hat{x},\lambda)\|$:

$$0\geqslant f(\hat{x}+h)\geqslant$$
$$\geqslant\max_{\lambda\in Л}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x},\lambda)[h,h]+\sum_{i=0}^{m}\alpha_i r_i(h)+\langle y^*, r\ (h)\rangle\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\max_{\lambda\in Л}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x},\lambda)[h_1+h_2,h_1+h_2]-\frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\alpha}{2}\|h_1\|^2-4C_3C_5\|h_1\|^3-8C_3^2C_5^2\|h_1\|^4-\frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2>0,$$

если только из $\|h\|<\delta\leqslant\min(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ следует неравенство

$$4C_3C_5\|h_1\|^3+8C_3^2C_5^2\|h_1\|^4<\frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2.\ \triangleright$$

Задачи

4.1. (P) $x^2+xy+y^2+3|x+y+2|\to\inf$.

4.2. $x^2+y^2+2\max(x;\ y)\to\inf$.

4.3. $x^2+y^2+2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to\inf$.

4.4. $x^2+y^2+2\alpha|x+y-1|\to\inf\quad(\alpha>0)$.

4.5. Найти расстояние от точки $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ до конуса $x_3\geqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

4.6. Найти расстояние от точки $(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$, лежащей вне эллипсоида $x_1^2/a_1^2+\ldots+x_n^2/a_n^2\leqslant 1$, до этого эллипсоида.

4.7. (P) Найти минимум линейного функционала в пространстве l_2 на границе эллипсоида с длинами осей, монотонно стремящимися к нулю. Всякая ли точка границы эллипсоида имеет нормаль, т. е. может служить точкой экстремума линейного функционала?

4.8. Найти расстояние от точки x_0, лежащей вне эллипсоида в гильбертовом пространстве, до этого эллипсоида (обобщенная задача Аполлония). *Эллипсоидом* в гильбертовом пространстве называется образ единичного шара при таком линейном отображении пространства в себя, что замыкание образа всего пространства при этом отображении совпадает со всем пространством.

4.9. Среди полиномов вида $t^2+x_1t+x_2$ найти полином, имеющий наименьшую норму в пространстве $C([-1,\ 1])$.

4.10. Вписать в единичный круг треугольник с максимальной взвешенной с положительными весами суммой квадратов сторон.

4.11. На каждой из сторон заданного треугольника найти по такой точке, чтобы образованный треугольник имел минимальный периметр (задача Шварца).

4.12. (Р) Найти в плоскости такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до трех заданных точек была минимальной (задача Штейнера).

4.13. Найти такую точку в плоскости, чтобы сумма расстояний от нее до четырех различных точек была минимальной.

4.14. Найти такую точку в плоскости, чтобы взвешенная сумма расстояний с положительными весами от нее до трех различных точек была минимальной (обобщенная задача Штейнера).

4.15. Найти в плоскости такую точку, чтобы сумма расстояний до вершин правильного многоугольника была минимальной.

Глава II

КЛАССИЧЕСКОЕ ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 5. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5.1. Задача Больца.

5.1.1. Постановка задачи. *Задачей Больца* называется следующая экстремальная задача без ограничений в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^1([t_0, t_1])$ (кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $KC^1([t_0, t_1])$):

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \mathrm{extr}. \qquad (з)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех, а $l = l(x_0, x_1)$ — функция двух переменных. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$. Задача Больца является элементарной задачей классического вариационного исчисления.

Функцию L называют *интегрантом*, функцию l — *терминантом*, а функционал $\mathscr{B}$ — *функционалом Больца*.

Будем говорить, что функция $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ доставляет (*слабый*) *локальный минимум* (*максимум*) задаче (з), или, что то же самое, функционалу $\mathscr{B}$ в пространстве $C^1([t_0, t_1])$, и писать $\hat{x}(\cdot) \in \mathrm{loc\,min}\,з$ ($\mathrm{loc\,max}\,з$), если найдется $\delta > 0$ такое, что для любой функции $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$, выполнено неравенство

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) \geqslant \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot)) \quad (\mathscr{B}(x(\cdot)) \leqslant \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot))).$$

Напомним, что если $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, то

$$\|x(\cdot)\|_1 = \max_{t \in [t_0, t_1]} \max\{|x(t)|, |\dot{x}(t)|\}.$$

При решении задач вариационного исчисления мы употребляем далее термины «абсолютный экстремум» или «глобальный экстремум». В эти термины можно вкладывать стандартный смысл, согласно которому найденная функция имеет экстремальное значение функционала среди всех допустимых функций (а у нас допустимые функции принадлежат C^1 или KC^1). Однако, как правило, функции, доставляюшие абсолютный экстремум в C^1 или KC^1, доставляют абсолютный экстремум и среди более широкого класса функций — среди всех абсолютно непрерывных функций, на которых функционал определен.

5.1.2. Правило решения.

1. Формализовать задачу, т. е. привести ее к виду (з) п. 5.1.1.

2. Выписать необходимые условия:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)+\widehat{L}_x(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\left(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\right)+ + L_x\left(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\right)=0$$

(решения уравнения Эйлера называются *экстремалями*);

б) условия трансверсальности

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0)=\widehat{l}_{x_0} \Leftrightarrow L_{\dot{x}}\left(t_0,\widehat{x}(t_0),\dot{\widehat{x}}(t_0)\right)=l_{x_0}(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1)),$$

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1)=-\widehat{l}_{x_1} \Leftrightarrow L_{\dot{x}}\left(t_1,\widehat{x}(t_1),\dot{\widehat{x}}(t_1)\right)=-l_{x_1}(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1)).$$

3. Найти допустимые экстремали, т. е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяюшие на концах условиям трансверсальности.

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

Набор условий для нахождения слабого локального экстремума является полным. Действительно, уравнение Эйлера — дифференциальное уравнение второго порядка. Его обшее решение содержит две неизвестные константы. Для определения этих констант имеются два уравнения — условия трансверсальности.

Мы сформулировали правила решения для одномерной задачи Больца. Укажем на необходимые изменения, которые следует внести в правило решения задачи Больца для векторного случая.

Пусть в задаче (з) п. 5.1.1 $x(\cdot)=(x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$, $L=L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — функция $2n+1$ переменных, $l=l(x_{01}, \ldots, x_{0n}, x_{11}, \ldots, x_{1n})$ — функция $2n$

переменных. Необходимые условия в векторной задаче Больца состоят из системы уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t)+\widehat{L}_{x_i}(t)=0, \qquad i=1,\ldots,n,$$

и условий трансверсальности, задающихся системой уравнений

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_k)=(-1)^k\,\widehat{l}_{x_{ki}}, \quad i=1,\ldots,n, \quad k=0,1.$$

Доказательство теоремы, касающейся необходимых условий экстремума, проводится в следующем пункте для одномерной задачи. Векторный случай тривиально редуцируется к одномерному.

5.1.3. Необходимые условия экстремума.

Теорема. *Пусть $\mathscr{U}$ — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^3$, L: $\mathscr{U}\to\mathbf{R}$ — интегрант, определенный на $\mathscr{U}$ и непрерывный в $\mathscr{U}$ вместе со своими частными производными L_x и $L_{\dot{x}}$, $\mathscr{V}$ — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^2$, l: $\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ — терминант, определенный и непрерывно дифференцируемый на $\mathscr{V}$, $\widehat{x}(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $[t_0,\ t_1]$ функция такая, что*

$$\left(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\right)\in\mathscr{U} \quad \forall t\in[t_0,t_1] \text{ и } \left(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1)\right)\in\mathscr{V}.$$

Тогда, если $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче Больца, то $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ и выполнены:

а) *уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)+\widehat{L}_x(t)=0;$$

б) *условия трансверсальности*

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_k)=(-1)^k\,\widehat{l}_{x_k}, \quad k=0,1.$$

◁ Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

А) Определение первой вариации по Лагранжу. Пусть $x(\cdot)\in C^1([t_0,\ t_1])$. Поскольку $\widehat{x}(\cdot)\in$ $\in\operatorname{loc\,extr} з$, то функция одного переменного:

$$\varphi(\lambda)=\mathscr{B}\left(\widehat{x}(\cdot)+\lambda x(\cdot)\right)=\int_{t_0}^{t_1}L\left(t,\widehat{x}(t)+\lambda x(t),\dot{\widehat{x}}(t)+\right.$$

$$\left.+\lambda\dot{x}(t)\right)dt+l\left(\widehat{x}(t_0)+\lambda x(t_0),\widehat{x}(t_1)+\lambda x(t_1)\right)$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Положим $F(t, \lambda) = L(t, \hat{x}(t) + \lambda x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{x}(t))$. Из условий гладкости, наложенных на L, $\hat{x}(\cdot)$, $x(\cdot)$, следует, что функция $\varphi(\lambda)$ дифференцируема в нуле. Действительно, функции F и F_λ непрерывны в некотором прямоугольнике $[t_0, t_1] \times [-\lambda_0, \lambda_0]$, и, значит, по известной теореме из анализа можно дифференцировать под знаком интеграла (Н, т. 2, с. 107). Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathscr{B}(\hat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot)) - \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot))}{\lambda} \overset{\text{def}}{=} \delta\mathscr{B}(\hat{x}(\cdot), x(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{L}_x(t)\, x(t) + \hat{L}_{\dot{x}}(t) \dot{x}(t)\right) dt + \hat{l}_{x_0} x(t_0) + \hat{l}_{x_1} x(t_1) = 0 \quad (1)$$

$$\forall x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Таким образом, мы вычислили вариацию по Лагранжу функционала Больца $\mathscr{B}$ и выяснили, что необходимым условием слабого локального экстремума этого функционала в $\hat{x}(\cdot)$ является равенство нулю его первой вариации.

Б) Лемма Дюбуа — Реймона. *Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ функции $a_0(\cdot)$ и $a_1(\cdot)$ непрерывны, и пусть для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(\cdot)$, для которой $x(t_0) = x(t_1) = 0$, выполнено равенство*

$$\int_{t_0}^{t_1} (a_1(t)\, \dot{x}(t) + a_0(t)\, x(t))\, dt = 0.$$

Тогда функция $a_1(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и

$$-\frac{da_1(t)}{dt} + a_0(t) = 0.$$

◁◁ Возьмем функцию $p(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ такую, что $\dot{p}(t) = a_0(t)$ и $\int_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} a_1(t)\, dt$. Тогда для любой функции $x(\ ) \in C^1([t_0, t_1])$, для которой $x(t_0) = x(t_1) = 0$, по условию леммы должно выполняться равенство

$$0=\int_{t_0}^{t_1}(a_1(t)\dot{x}(t)+a_0(t)x(t))\,dt=\int_{t_0}^{t_1}a_1(t)\dot{x}(t)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}x(t)\,dp(t)=\int_{t_0}^{t_1}(a_1(t)-p(t))\,\dot{x}(t)\,dt. \qquad (2)$$

Выберем функцию $\tilde{x}(\cdot)\in C^1([t_0,\ t_1])$ такую, что $\dot{\tilde{x}}(t)=$ $=a_1(t)-p(t)$, $\tilde{x}(t_0)=0$. Тогда в силу выбора функции $p(\cdot)$

$$\tilde{x}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\dot{\tilde{x}}(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}(a_1(t)-p(t))\,dt=0.$$

Значит, для функции $x(\cdot)=\tilde{x}(\cdot)$ должно выполняться равенство (2), т. е. $\int_{t_0}^{t_1}(a_1(t)-p(t))^2\,dt=0$. Из последнего соотношения следует, что $a_1(t)\equiv p(t)$, т. е. $a_1(\cdot)\in$ $\in C^1([t_0,t_1])$, $-\frac{d}{dt}a_1(t)+a_0(t)=0$. $\triangleright\triangleright$

В) Завершение доказательства. Равенство (1) выполняется для любой функции $x(\cdot)\in C^1([t_0,\ t_1])$, а значит, и для всех функций $x\in C_0^1([t_0,t_1])=\{x(\cdot)\in$ $\in C^1([t_0,t_1])\mid x(t_0)=x(t_1)=0\}$. Следовательно, из (1) вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\,\dot{x}(t)+\hat{L}_x(t)\,x(t)\right)dt=0 \quad \forall x(\cdot)\in C_0^1([t_0,t_1]).$$

По лемме Дюбуа — Реймона $\hat{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ и

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0. \qquad (3)$$

Интегрируя по частям в равенстве (1) (оно стало возможным в силу доказанного включения $\hat{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in$

$\in C^1([t_0, t_1])$ и учитывая (3), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat{L}_x(t)\, x(t) + \widehat{L}_{\dot{x}}(t)\, \dot{x}(t)\right) dt + \widehat{l}_{x_0} x(t_0) + \widehat{l}_{x_1} x(t_1) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\right) x(t)\, dt + x(t)\,\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \widehat{l}_{x_0}\, x(t_0) +$$

$$+ \widehat{l}_{x_1} x(t_1) = \left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \widehat{l}_{x_1}\right) x(t_1) + \left(-\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \widehat{l}_{x_0}\right) x(t_0) = 0 \tag{4}$$

$$\forall x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Подставляя в (4) последовательно $x(t) = t - t_0$ и $x(t) = t - t_1$, придем к условиям трансверсальности $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{l}_{x_0}$ и $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{l}_{x_1}$. ▷

Замечание. Отметим, что эти три этапа доказательства теоремы будут в той или иной форме встречаться при доказательстве и других теорем классического вариационного исчисления и оптимального управления.

5.1.4. Пример.

1. $\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\, dt + x^2(1) \to \text{extr}.$

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow 2\ddot{x} + 1 = 0;$

б) условия трансверсальности

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \quad L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Leftrightarrow \dot{x}(0) = 0, \ \dot{x}(1) = -x(1).$$

3. Общее решение уравнения Эйлера: $x(t) = -t^2/4 + C_1 t + C_2$. Из условий трансверсальности находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 3/4$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x}(t) = (3 - t^2)/4$.

4. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, то

$$\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = \int_0^1 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}\, dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt - \int_0^1 h\, dt +$$
$$+ 2\widehat{x}(1)\, h(1) + h^2(1).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\widehat{x}(t) = (3 - t^2)/4$, получим

$$\mathcal{J}\left(\widehat{x}(\cdot) + h(\cdot)\right) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(2\ddot{\widehat{x}} + 1\right) h\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \dot{h}^2 dt + 2\widehat{x}(1)\,h(1) + h^2(1) = \int_0^1 \dot{h}^2 dt + h^2(1) \geqslant 0.$$

Ответ. $\widehat{x}(t) = (3 - t^2)/4 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

5.2. Простейшая задача классического вариационного исчисления.

5.2.1. Постановка задачи. *Простейшей задачей классического вариационного исчисления* называется следующая экстремальная задача в $C^1([t_0, t_1])$ (или в $KC^1([t_0, t_1])$):

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to \operatorname{extr}; \qquad (з)$$

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1.$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех переменных, называемая *интегрантом.* Экстремум в задаче рассматривается среди функций $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих условиям на концах, или *краевым условиям* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$; такие функции называются *допустимыми.*

Будем говорить, что допустимая функция $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет *слабый локальный минимум* (*максимум*) в задаче (з), и писать $\widehat{x}(\cdot) \in \operatorname{loc\,min}$ з ($\operatorname{loc\,max}$ з), если существует $\delta > 0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\cdot)$, для которой $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$, выполняется неравенство

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) \qquad (\mathcal{J}(x(\cdot)) \leqslant \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot))).$$

Наряду со слабым экстремумом в классическом вариационном исчислении традиционно рассматривается сильный экстремум. При этом несколько расширяется класс функций, на которых рассматривается функционал $\mathcal{J}$. Экстремум в задаче (з) ищется среди функций $x(\cdot)$, принадлежащих классу $KC^1([t_0, t_1])$, т. е. среди кусочно-непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям на концах.

Будем говорить, что допустимая функция $\widehat{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$ *доставляет сильный локальный минимум* (*максимум*), если существует $\delta > 0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\ ) \in KC^1([t_0,\ t_1])$, для которой $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_0 < \delta$, выполняется неравенство

$$\mathscr{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathscr{J}(\widehat{x}(\cdot)) \qquad (\mathscr{J}(x(\cdot)) \leqslant \mathscr{J}(\widehat{x}(\cdot))).$$

Ясно, что если $\widehat{x}(\cdot) \in C^1([t_0,\ t_1])$ доставляет сильный, то она доставляет и слабый экстремум. Поэтому для таких функций необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

5.2.2. Правило решения.

1. Формализовать задачу, т. е. привести ее к виду (з) п. 5.2.1.

2. Выписать необходимое условие — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0.$$

3. Найти допустимые экстремали, т. е. решения уравнения Эйлера, являющиеся допустимыми функциями.

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

Это правило находится в полном соответствии с принципом Лагранжа. Покажем это соответствие.

1. Функция Лагранжа задачи (з) имеет вид

$$\mathscr{L} = \lambda_0 \int\limits_{t_0}^{t_1} L_0(t, x, \dot{x})\, dt + \mu_0 x(t_0) + \mu_1 x(t_1).$$

2. Необходимые условия экстремума в задаче $\mathscr{L} \to \mathrm{extr}$ являются необходимыми условиями экстремума в задаче Больца и записываются следующим образом:

$$\lambda_0\left(-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t)\right) = 0,$$

$$\lambda_0 \widehat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \mu_k, \quad k = 0, 1.$$

3, 4. Если $\lambda_0 = 0$, то из условий трансверсальности следует, что $\mu_k = 0$, $k = 0,\ 1$. Это противоречит тому, что не все множители Лагранжа равны нулю. Полагаем $\lambda_0 = 1$ и приходим к уравнению Эйлера, а условия трансверсальности не информативны, они дают возможность отыскать неизвестные множители Лагранжа μ_0 и μ_1, которые нам в принципе не нужны. Осталось найти допустимые экстремали и выбрать из них решение или показать, что решения нет.

Набор условий для нахождения допустимой экстремали является полным. Уравнение Эйлера — дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение содержит две неизвестные константы. Для определения этих констант имеются два уравнения — условия на концах. Таким образом, чаще всего допустимая экстремаль единственна.

Мы сформулировали правило решения для одномерной простейшей задачи классического вариационного исчисления. Укажем на необходимые изменения для векторного случая.

Пусть в задаче (з) п. 5.2.1 $x(\cdot)=(x_1(\cdot),\ \ldots,\ x_n(\cdot))$, $L=L(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \dot{x}_1,\ \ldots,\ \dot{x}_n)$ — функция $2n+1$ переменных. Необходимые условия в простейшей векторной задаче состоят из системы уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t)+\widehat{L}_{x_i}(t)=0,\qquad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Доказательство теоремы, как и в п. 5.1.3, проведем в п. 5.2.3 в одномерном случае, ибо векторный тривиально к нему редуцируется.

5.2.3. Необходимое условие экстремума.

Теорема. *Пусть $\mathcal{U}$ — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^3$, $L\colon \mathcal{U}\to\mathbf{R}$ — интегрант, определенный на $\mathcal{U}$ и непрерывный в $\mathcal{U}$ вместе со своими частными производными L_x и $L_{\dot{x}}$, $\widehat{x}(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0,\ t_1]$ функция такая, что $\left(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\right)\in\mathcal{U}$ $\forall t\in[t_0,t_1]$. Тогда, если $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет слабый локальный экстремум в простейшей задаче классического вариационного исчисления, то $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in$ $\in C^1([t_0,\ t_1])$ и выполнено уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)+\widehat{L}_x(t)=0.$$

◁ Рассуждаем совершенно аналогично тому, как мы рассуждали в п. 5.1.3. Пусть $x(\cdot)\in C_0^1([t_0,t_1])$. Тогда $\widehat{x}(\cdot)+\lambda x(\cdot)$ — допустимая функция $\forall\lambda\in\mathbf{R}$. Положим $\varphi(\lambda)=\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)+\lambda x(\cdot))$. Из условия $\widehat{x}(\cdot)\in\operatorname{loc\,extr}з$ следует, что $0\in\operatorname{loc\,extr}\varphi$. Пользуясь дифференцируемостью функции φ в нуле и выражением для вариации функционала из п. 5.1.3, получаем

$$\varphi'(0)=\delta\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot),x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{x}(t)+\widehat{L}_x(t)x(t)\right)dt=0$$

$$\forall x(\cdot)\in C_0^1([t_0,t_1]).$$

Из леммы Дюбуа — Реймона следует, что $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in$ $\in C^1([t_0,t_1])$, и выполнено уравнение Эйлера. ▷

5.2.4. Интегралы уравнения Эйлера. Если интегрант $L=L(t,x,\dot{x})$ не зависит явно от одной из переменных, то уравнение Эйлера сводится к более простым уравнениям.

1. Если интегрант $L=L(t,x)$ не зависит явно от $\dot{x}$, то уравнение Эйлера сводится к уравнению

$$\widehat{L}_x(t)=0.$$

2. Если интегрант $L=L(t,\dot{x})$ не зависит явно от x, то имеет место *интеграл импульса*

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t)=\text{const}.$$

3. Если интегрант $L=L(x,\dot{x})$ не зависит явно от t, то имеет место *интеграл энергии* (оба названия интегралов взяты из классической механики)

$$\dot{\widehat{x}}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)-\widehat{L}(t)=\text{const}.$$

5.3. Примеры. В этом пункте на примерах рассмотрим различные соотношения между решениями простейшей задачи классического вариационного исчисления и экстремалями.

Пример 1 (допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет глобальный экстремум).

$$1.\ \mathcal{J}(x(\cdot))=\int_0^1\dot{x}^2dt\to\inf;\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$$

2. Уравнение Эйлера: $\ddot{x}=0$.

3. Общее решение: $x=C_1t+C_2$. Единственная допустимая экстремаль: $\widehat{x}=t$.

4. Экстремаль доставляет глобальный минимум в задаче. Действительно, пусть $x(\cdot)\in C^1([0,1])$, $x(0)=0$,

$x(1)=1$. Тогда

$$h(\cdot)=x(\cdot)-\widehat{x}(\cdot)\in C_0^1([0,1])=$$
$$=\{z(\cdot)\in C^1([0,1])\mid z(0)=z(1)=0\},$$

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)+h(\cdot))=\int_0^1(1+\dot{h})^2\,dt=\int_0^1 dt+$$
$$+2\int_0^1\dot{h}\,dt+\int_0^1\dot{h}^2dt=\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot))+\int_0^1\dot{h}^2dt\geqslant\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)).$$

В этом примере все обстоит самым благополучным образом. В дальнейших примерах встречаются различные осложнения.

Пример 2 (допустимая экстремаль существует, единственна, доставляет слабый, но не доставляет сильного экстремума).

1. $\mathcal{J}(x(\cdot))=\int_0^1\dot{x}^3dt\to\inf;\ x(0)=0,\ x(1)=1.$

2. Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}3\dot{x}^2=0\Leftrightarrow 3\dot{x}^2=C\Leftrightarrow\dot{x}=\mathrm{const}.$

3. Общее решение: $x=C_1t+C_2$. Единственная допустимая экстремаль: $\widehat{x}=t$.

4. Экстремаль доставляет слабый локальный минимум. Действительно, пусть $h(\cdot)\in C_0^1([0,1])$. Тогда

$$\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)+h(\cdot))=\int_0^1(1+\dot{h})^3\,dt=\int_0^1 dt+3\int_0^1\dot{h}\,dt+$$
$$+\int_0^1\dot{h}^2(3+\dot{h})\,dt=\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot))+\int_0^1\dot{h}^2(3+\dot{h})\,dt.$$

Отсюда видно, что если $\|h(\cdot)\|_1<3$, то $3+\dot{h}(t)>0$ и, значит, $\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)+h(\cdot))\geqslant\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot))$, т. е. $\widehat{x}(\cdot)\in\mathrm{loc\,min}$.

Покажем, что $\widehat{x}(\cdot)$ не доставляет сильного экстремума. Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(t)=\begin{cases}-\sqrt{n}, & t\in[0,1/n),\\ 0, & t\in[1/n,1/2],\\ 2/\sqrt{n}, & t\in(1/2,1],\end{cases}\qquad h_n(t)=\int_0^t g_n(\tau)\,d\tau,\quad n\geqslant 2,$$

Легко понять, что $h_n(0)=h_n(1)=0$ и $\|h_n(\cdot)\|_0\to 0$ при $n\to\infty$. Положим $x_n(\cdot)=\widehat{x}(\cdot)+h_n(\cdot)$. Получим последовательность функций $\{x_n(\cdot)\}$, для которых $x_n(0)=0$, $x_n(1)=1$, $x_n(\cdot)\to\widehat{x}(\cdot)$ в $C([0,1])$ и

$$\mathcal{J}(x_n(\cdot))=1+3\int_0^1 g_n^2dt+\int_0^1 g_n^3dt=1+\int_0^{1/n}\left(3n-n^{3/2}\right)dt+$$

$$+\int_{1/2}^1\left(\frac{12}{n}+\frac{8}{n\sqrt{n}}\right)dt=-\sqrt{n}+O(1)\to-\infty \text{ при } n\to\infty,$$

т. е. $S_{\min}=-\infty$.

Пример 3 (экстремаль существует, единственна, доставляет глобальный экстремум, но не является непрерывно дифференцируемой функцией).

$$1.\ \mathcal{J}(x(\cdot))=\int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2dt\to\inf;\ x(0)=0,\ x(1)=1$$

(пример Гильберта).

2. Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}\left(2t^{2/3}\dot{x}\right)=0\Leftrightarrow t^{2/3}\dot{x}=C\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\dot{x}=Ct^{-2/3}$.

3. Общее решение: $x=C_1t^{1/3}+C_2$. Единственная экстремаль, удовлетворяющая условиям на концах: $\widehat{x}=t^{1/3}$.

4. Ясно, что экстремаль не является функцией класса $C^1([0,1])$, так как $\dot{\widehat{x}}(\cdot)\notin C([0,1])$. Покажем тем не менее, что она доставляет глобальный минимум в задаче среди всех абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих краевым условиям, для которых интеграл $\mathcal{J}$ конечен. Действительно,

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\mathcal{J}\left(\widehat{x}(\cdot)+h(\cdot)\right)=\int_0^1 t^{2/3}\left(\frac{t^{-2/3}}{3}+\dot{h}\right)^2dt=$$

$$=\mathcal{J}\left(\widehat{x}(\cdot)\right)+\frac{2}{3}\int_0^1\dot{h}\,dt+\int_0^1 t^{2/3}\dot{h}^2dt\geqslant\mathcal{J}\left(\widehat{x}(\cdot)\right).$$

Пример 4 (решения задачи и допустимой экстремали не существует даже среди абсолютно непрерывных функций).

1. $\mathcal{J}(x(\cdot))=\int\limits_0^1 t^2\dot{x}^2dt\to\inf;\ x(0)=0,\ x(1)=1$

(пример Вейерштрасса).

2. Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}(2t^2\dot{x})=0\Leftrightarrow t^2\dot{x}=C\Leftrightarrow\dot{x}=$ $=C/t^2$.

3. Общее решение: $\hat{x}=C_1/t+C_2$. Экстремали, удовлетворяющей краевому условию $x(0)=0$, не существует.

4. Очевидно, что $\mathcal{J}(x(\cdot))\geqslant 0$ и для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot)$ $\mathcal{J}(x(\cdot))>0$. Покажем, что нижняя грань в задаче равна нулю. Рассмотрим последовательность допустимых функций $x_n(t)=\operatorname{arctg} nt/\operatorname{arctg} n$. Имеем

$$\mathcal{J}(x_n(\cdot))=\int\limits_0^1 t^2\frac{n^2}{(1+n^2t^2)^2\operatorname{arctg}^2 n}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{1/n}\frac{dt}{\operatorname{arctg}^2 n}+\int\limits_{1/n}^1\frac{dt}{n^2t^2\operatorname{arctg}^2 n}\to 0.$$

Пример 5 (допустимая экстремаль существует, единственна, но не доставляет экстремума).

1. $\mathcal{J}(x(\cdot))=\int\limits_0^{3\pi/2}(\dot{x}^2-x^2)\,dt\to\inf;\ x(0)=x\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0.$

2. Уравнение Эйлера: $\ddot{x}+x=0$.

3. Общее решение: $x=C_1\sin t+C_2\cos t$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x}\equiv 0$.

4. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t)=$ $=\frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}$. Очевидно, что x_n — допустимые функции и $x_n(\ )\to\hat{x}(\cdot)\equiv 0$ в $C^1([0,\ 3\pi/2])$, но при этом

$$\mathcal{J}(x_n(\cdot))=\frac{1}{n^2}\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9}-1\right)=-\frac{5\pi}{12n^2}<0=\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)).$$

Из примера 5, в частности, видно, что уравнение Эйлера — необходимое, но не достаточное условие экстремума. Мы вернемся к обсуждению этого примера в п. 5.7.

В заключение приведем еще один важный пример задачи, где нет решения.

Пример 6.

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\int_0^1((1-\dot{x}^2)^2+x^2)\,dt\to\inf;\ x(0)=0,\ x(1)=0.$$

Нижняя грань функционала равна здесь нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть минимизирующую последовательность функций из $KC^1([0,1])$:

$$x_n(t)=\int_0^t \operatorname{sign}\sin 2\pi n\tau\,d\tau,\ n=1,2,\ldots$$

Функции $x_n(\cdot)$ равномерно стремятся к нулю, и $|\dot{x}_n(t)|=1$, за исключением конечного числа точек, т. е. $\mathcal{J}(x_n(\cdot))\to 0$. С другой стороны, если $x_0(t)=0$, то $\mathcal{J}(x_0(\cdot))=1$, а если $x(t)\not\equiv 0$, то $\mathcal{J}(x(\cdot))\geqslant\int_0^1 x^2dt>0$. Таким образом, нижняя грань функционала не достигается ни на одной допустимой функции.

Раскроем причины отсутствия решений в рассмотренных примерах. То, что в примере 2 численное значение задачи равно $-\infty$, объясняется тем, что *овыпуклeние интегранта тождественно равно* $-\infty$ (см. далее п. 5.5.3 — теорему Боголюбова). Пример 3 показывает, что пространства C^1 и KC^1 *не являются естественными для данной задачи* и наводят на мысль (идущую от Гильберта), что задачу следует, вообще говоря, исследовать в «своем» пространстве. Причина же негладкости решения в этом примере и отсутствия решения в примере 4 связана с *нарушением условия Лежандра* (обсуждение примеров 3 и 4 продолжается далее в задачах 9.10 и 9.11; об условии Лежандра см. п. 5.5). Отсутствие решения в примере 5 объясняется тем, что на экстремали имеется *сопряженная точка* (об этом см. п. 5 6). О примере 6 см. п. 5.5.3.

5.4. Задачи с подвижными концами.

5.4.1. Постановка задачи. *Задачей с подвижными концами* называется следующая задача в пространстве $C^1(\Delta)\times\mathbf{R}^2$:

$$\mathcal{J}(x(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt+\psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to\text{extr};\quad (3)$$

$$\psi_i(t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1))=0,\quad i=1,\ldots,m.\quad (1)$$

Здесь Δ — заданный конечный отрезок, $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех, а $\psi_i = \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1)$ — четырех переменных, $t_0, t_1 \in \Delta$. В отличие от задачи Больца и простейшей задачи классического вариационного исчисления, концы отрезка интегрирования являются подвижными и, следовательно, решение задачи включает в себя некоторую функцию $\widehat{x}(\cdot)$ и тот отрезок $[\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$, на котором она рассматривается. Значения функции $x(\cdot)$ в точках t_0 и t_1 в общем случае могут быть и не заданы. Частным случаем (з) является задача, в которой один из концов t_0 или t_1 — подвижный, а другой закреплен.

Тройка $(x(\cdot), t_0, t_1)$ называется *допустимой* в (з), если $x(\cdot) \in C^1(\Delta)$, $t_0, t_1 \in \operatorname{int} \Delta$, $t_0 < t_1$, и выполняются условия (1) на концах.

Будем говорить, что допустимая тройка $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ доставляет *слабый локальный минимум* (*максимум*) в задаче (з) (в пространстве $C^1(\Delta) \times \mathbf{R}^2$), если существует $\delta > 0$ такое, что для любой другой допустимой тройки $(x(\cdot), t_0, t_1)$, для которой $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta, |t_1 - \widehat{t}_1| < \delta$ и $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C^1(\Delta)} < \delta$, выполняется неравенство

$$\mathcal{J}(x(\cdot), t_0, t_1) \geqslant \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$$
$$(\mathcal{J}(x(\cdot), t_0, t_1) \leqslant \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)).$$

При этом будем писать $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1) \in \operatorname{loc\,min} з$ ($\operatorname{loc\,max} з$).

Отметим, что если $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1) \in \operatorname{loc\,extr} з$, то любая допустимая тройка $(x(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ такая, что ограничение $x(\cdot)$ на $[\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$ совпадает с $\widehat{x}(\cdot)$, также будет доставлять локальный экстремум. Поэтому при выписывании ответа в (з) достаточно задавать $\widehat{x}(\cdot)$ только на $[\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$.

5.4.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), t_0, t_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 L(t, x, \dot{x})\, dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$ — множители Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} \lambda_0 \widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \lambda_0 \widehat{L}_x(t) = 0;$$

б) условия трансверсальности по x:

$$\lambda_0 \widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{t}_0) = \widehat{l}_{x_0}, \quad \lambda_0 \widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{t}_1) = -\widehat{l}_{x_1},$$

где $l = l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i (t_0, x_0, t_1, x_1)$;

в) условия стационарности по t_0, t_1:

$$\widehat{\mathscr{L}}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 \widehat{L}(\widehat{t}_0) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left(\widehat{\psi}_{it_0} + \widehat{\psi}_{ix_0} \dot{\widehat{x}}(\widehat{t}_0)\right) = 0,$$

$$\widehat{\mathscr{L}}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \widehat{L}(\widehat{t}_1) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left(\widehat{\psi}_{it_1} + \widehat{\psi}_{ix_1} \dot{\widehat{x}}(\widehat{t}_1)\right) = 0$$

(условия стационарности выписываются только для подвижных концов).

3. Найти допустимые экстремали, т. е. решения уравнения Эйлера, являющиеся допустимыми функциями и удовлетворяющие условиям б), в) с вектором множителей Лагранжа λ, не равным нулю. При этом бывает удобно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой, отличной от нуля константе.

4. Найти решение среди допустимых экстремалей или доказать, что решения нет.

Покажем, что правило решения сформулировано в соответствии с принципом Лагранжа. Действительно, составим функцию Лагранжа

$$\mathscr{L}(x(\cdot), t_0, t_1, \lambda) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)).$$

Из задачи $\mathscr{L}(x(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1, \lambda) \to \text{extr}$ по $x(\cdot)$ (задача Больца) вытекают необходимые условия а), б), а из задачи $\mathscr{L}(\widehat{x}(\cdot), t_0, t_1, \lambda) \to \text{extr}$ по t_0, t_1 (элементарная гладкая задача) вытекают необходимые условия в).

Набор условий для определения тройки, доставляющей экстремум, является полным. Действительно, общее решение дифференциального уравнения второго порядка — уравнения Эйлера — содержит две неизвестные константы интегрирования. Множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ определены с точностью до умножения на константу, следовательно, содержат m неизвестных. Таким образом, включая два подвижных конца интегрирования, имеем $m+4$ неизвестных. Для их отыскания у нас есть также $m+4$ уравнений: m условий в (1) п. 5.4.1, 2 условия трансверсальности и 2 условия стационарности по t_k, $k=0, 1$.

5.4.3. Необходимые условия экстремума. В этом пункте приведем доказательство необходимого условия экстремума для следующего частного случая задачи с двумя подвижными концами:

$$\mathcal{J}(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr}; \qquad (з)$$

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0), \quad x(t_1) = \varphi_1(t_1).$$

Общий случай рассмотрен в п. 8.1.3.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(\mathbf{R}^3)$, $L\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$, $L \in C^1(\mathcal{U})$, $\hat{x}(\cdot) \in C^1(\Delta)$, $(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \in \mathcal{U}$ $\forall t \in \Delta$, $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}(\hat{t}_i, \mathbf{R})$, $\varphi_i\colon \mathcal{U}_i \to \mathbf{R}$, $\varphi_i \in C^1(\mathcal{U}_i)$, $\hat{x}(\hat{t}_i) = \varphi_i(\hat{t}_i)$, $i=0, 1$.

Тогда, если $(\hat{x}(\ ), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \in \text{loc extr}\ з$, *то выполняются:*
а) *уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

б) *условия трансверсальности*

$$\hat{L}(\hat{t}_i) = \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_i)(\dot{\hat{x}}(\hat{t}_i) - \dot{\varphi}_i(\hat{t}_i)), \quad i = 0, 1.$$

Нетрудно видеть, что эти условия трансверсальности эквивалентны условиям трансверсальности п. 5.4.2 с учетом условий стационарности по t_0 и t_1.

◁ Уравнение Эйлера выполняется в силу теоремы п. 5.2.3, ибо $\hat{x}$ доставляет также локальный экстремум функционалу $\mathcal{J}$ при фиксированных краевых условиях $x(\hat{t}_i) = \hat{x}(\hat{t}_i)$, $i=0, 1$. Докажем условие трансверсальности на правом конце — в точке $\hat{t}_1$. Доказательство условия трансверсальности на левом конце — в точке $\hat{t}_0$ — проводится аналогично.

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $x(t, C) = \hat{x}(t) + C(t - \hat{t}_0)$ и функцию двух переменных $\psi(t_1, C) = x(t_1, C) - \varphi_1(t_1)$. По условию, $\psi(\hat{t}_1, 0) = \hat{x}(\hat{t}_1) - \varphi_1(\hat{t}_1) = 0$. Далее, $\psi_C(\hat{t}_1, 0) = \hat{t}_1 - \hat{t}_0 \neq 0$. По конечномерной теореме о неявной функции (п. 1.5.3) существует непрерывно дифференцируемая функция $t_1 \to C(t_1)$ такая, что $C(\widehat{t}_1) = 0$ и $x(t_1, C(t_1)) = \varphi_1(t_1)$; при этом $C'(\widehat{t}_1) = (\dot{\varphi}_1(\widehat{t}_1) - \dot{\widehat{x}}(\widehat{t}_1))/(\widehat{t}_1 - \widehat{t}_0)$.

Положим

$$A(t_1) = \mathcal{J}(x(\cdot, C(t_1)), \widehat{t}_0, t_1) = \int_{\widehat{t}_0}^{t_1} L(t, \widehat{x}(t) + C(t_1)(t - \widehat{t}_0), \dot{\widehat{x}}(t) + C(t_1))\, dt.$$

Поскольку $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1) \in \operatorname{loc\,extr} з$, то $\widehat{t}_1 \in \operatorname{loc\,extr} A$. Отсюда по теореме Ферма (п. 2.1.3) $A'(\widehat{t}_1) = 0$. Дифференцируя функцию $A(t_1)$ в точке $t_1 = \widehat{t}_1$, имеем

$$0 = \widehat{L}(\widehat{t}_1) + C'(\widehat{t}_1) \int_{\widehat{t}_0}^{\widehat{t}_1} \left(\widehat{L}_x(t)(t - \widehat{t}_0) + \widehat{L}_{\dot{x}}(t)\right) dt.$$

Интегрируя по частям с учетом уравнения Эйлера и подставляя выражение для $C'(\widehat{t}_1)$, получаем условие трансверсальности на правом конце:

$$0 = \widehat{L}(\widehat{t}_1) + C'(\widehat{t}_1)\left(\int_{\widehat{t}_0}^{\widehat{t}_1} \left(\widehat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\right)(t - \widehat{t}_0)\, dt + (t - \widehat{t}_0)\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\Big|_{\widehat{t}_0}^{\widehat{t}_1}\right) = \widehat{L}(\widehat{t}_1) + (\dot{\varphi}_1(\widehat{t}_1) - \dot{\widehat{x}}(\widehat{t}_1))\widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{t}_1). \ \triangleright$$

5.4.4. Пример. $\mathcal{J}(x(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)\, dt \to \operatorname{extr}$; $x(0) = 0$.

Решение. 1. Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_0^T \lambda_0 (\dot{x}^2 - x + 1)\, dt + \lambda x(0).$$

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера для интегранта $L = \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)$:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}} + \widehat{L}_x = 0 \Leftrightarrow \lambda_0(2\ddot{x} + 1) = 0;$$

б) условия трансверсальности по x для терминанта $l = \lambda x(0)$:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(0) = \widehat{l}_{x(0)}, \quad \widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{T}) = -\widehat{l}_{x(T)} \Leftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda,$$

$$2\lambda_0 \dot{x}(\widehat{T}) = 0;$$

в) условие стационарности по T (выписываем только для подвижного конца):

$$\widehat{\mathscr{L}}_T(\widehat{T}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0(\dot{x}^2(\widehat{T}) - x(\widehat{T}) + 1) = 0.$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то из б) следует, что $\lambda = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из а) вытекает, что $\ddot{x} = -1/2$. Общее решение этого дифференциального уравнения: $x = -t^2/4 + C_1 t + C_2$. Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Для определения неизвестных C_1 и $\widehat{T}$ имеем два уравнения: $\dot{x}(\widehat{T}) = 0$ и $\dot{x}^2(\widehat{T}) - x(\widehat{T}) + 1 = 0$. Решая эту систему уравнений, находим, что $\widehat{T} = 2$, $C_1 = 1$.

4. В задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} = -t^2/4 + t$, рассматриваемая на отрезке $[0, 2]$. Покажем, что $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{T}) \notin \operatorname{loc\,extr}$. Действительно, для функции $\widehat{x}(t) = t - t^2/4$

$$\mathscr{I}(\widehat{x}(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{\widehat{x}}^2 - \widehat{x} + 1)\, dt =$$

$$= \int_0^T \left(\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{t^2}{4}\right) + 1\right) dt = \frac{(T-2)^3}{6} + \frac{4}{3}.$$

При T, близких к $\widehat{T} = 2$, значения функционала $\mathscr{I}(\widehat{x}(\cdot), T)$ могут быть как меньше $\mathscr{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{T})$, так и больше $\mathscr{I}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{T})$.

Возьмем последовательность пар $x_n(t) = t$, $T_n = n$; тогда $\mathscr{I}(x_n(\cdot), T_n) \to -\infty$ при $n \to +\infty$. Значит, $S_{\min} = -\infty$. Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$.

5.5. Необходимые условия высших порядков и достаточные условия. Теорема Боголюбова.

5.5.1. Простейшая задача. Рассмотрим простейшую задачу

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \to \inf; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{з}$$

где $L\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n+1})$.

Будем далее предполагать, что интегрант L по меньшей мере принадлежит классу $C^2(\mathcal{U})$. Пусть $\widehat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ — экстремаль (з), т. е. на $\widehat{x}(\cdot)$ удовлетворяется уравнение Эйлера.

Будем говорить, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено *условие Лежандра*, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$, и *усиленное условие Лежандра*, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$.

При наших допущениях относительно гладкости интегранта L функционал $\mathcal{J}$ имеет вторую производную в точке $\widehat{x}(\cdot)$ следующего вида *):

$$\mathcal{J}''(\widehat{x}(\cdot))[x(\cdot), x(\cdot)] = \mathcal{K}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle)\, dt, \tag{1}$$

где $A(t) = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$, $B(t) = \widehat{L}_{xx}(t)$, $2C(t) = \widehat{L}^*_{x\dot{x}}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)$.

Уравнение Эйлера для функционала $\mathcal{K}$, т. е. уравнение

$$-\frac{d}{dt}(A\dot{x} + C^*x) + C\dot{x} + Bx = 0,$$

называется *уравнением Якоби* для исходной задачи на экстремали $\widehat{x}(\cdot)$.

---

*) Следует иметь в виду при этом, что $L_{x\dot{x}} = \left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j}\right)_{i,j=1}^n$, $L_{\dot{x}x} = \left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$, а для матрицы $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ справедливо $\langle Dx, y\rangle = \sum_{i,j=1}^n d_{ij} x_j y_i$.

Пусть на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется *сопряженной* к точке t_0, если существует нетривиальное решение h уравнения Якоби, для которого $h(t_0)=h(\tau)=0$. Говорят, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено *условие Якоби* (*усиленное условие Якоби*), если в интервале (t_0, t_1) (полуинтервале $(t_0, t_1]$) нет точек, сопряженных с t_0.

Уравнение Якоби — это линейное уравнение второго порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно второй производной. Пусть $H(t, t_0)$ — матричное решение уравнения Якоби с условиями $H(t_0, t_0)=0$, $\dot{H}(t_0, t_0)$ невырождена (обычно полагают $\dot{H}(t_0, t_0)=I$). Очевидно, что точка τ является сопряженной к t_0 тогда и только тогда, когда матрица $H(\tau, t_0)$ является вырожденной. Это дает аналитическое средство находить сопряженные точки.

Если $\mathcal{U}=V\times\mathbf{R}^n$, $V\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^{n+1})$ и функция $\dot{x}\to L(t, x, \dot{x})$ выпукла (строго выпукла) $\forall (t,x)\in V$, то говорят, что интегрант L — *квазирегулярен* (*регулярен*) на V.

Теорема 1. Необходимые условия слабого минимума. *Пусть в задаче* (з) *интегрант L удовлетворяет условию гладкости $L\in C^3(\mathcal{U})$. Если $\widehat{x}(\cdot)\in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ и доставляет слабый минимум* (з), *то функция $\widehat{x}(\cdot)$ должна быть экстремалью, на которой удовлетворяются условия Лежандра и Якоби.*

Достаточные условия сильного минимума. *Пусть $\mathcal{U}=V\times\mathbf{R}^n$, $V\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^{n+1})$, интегрант $L\in C^4(\mathcal{U})$ и квазирегулярен на V. Тогда, если $\widehat{x}(\cdot)\in C^3([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ и при этом $\widehat{x}(\cdot)$ — допустимая экстремаль, на которой удовлетворяются усиленные условия Лежандра и Якоби, то $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет сильный минимум задачи* (з).

Для квадратичных функционалов вида (1) задача может быть исследована до конца.

Теорема 2. *Пусть в* (з) *функционал имеет вид* (1), *причем матрицы A и C непрерывно дифференцируемы, матрица B непрерывна и выполнено усиленное условие Лежандра $A(t)>0$ $\forall t\in[t_0, t_1]$. Тогда, если не выполнено условие Якоби, т. е. в интервале (t_0, t_1) есть сопряженная точка, то нижняя грань в задаче равна $-\infty$. Если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.*

5.5.2. Задача Больца. Рассмотрим задачу Больца

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\,dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf, \qquad (3)$$

где $L\colon \mathscr{U} \to \mathbf{R}$, $\mathscr{U} \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^{2n+1})$, $l\colon \mathscr{V} \to \mathbf{R}$, $\mathscr{V} \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^{2n})$.

Теорема 1. Необходимые условия слабого минимума. *Пусть в задаче* (3) *интегрант L и терминант l удовлетворяют условию гладкости $L \in C^3(\mathscr{U})$, $l \in C^2(\mathscr{V})$. Если $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ и доставляет слабый минимум* (3), *то на $\hat{x}(\cdot)$ удовлетворяются уравнение Эйлера, условия трансверсальности, Лежандра и Якоби, а если выполнено усиленное условие Якоби, то квадратичная форма $P + Q$ должна быть неотрицательна. Здесь*

$$Q = Q(x_0, x_1) = l''(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))[(x_0, x_1), (x_0, x_1)],$$

$$P = P(x_0, x_1) = \langle A(t_1)(\dot{H}_0(t_1)x_0 + \dot{H}_1(t_1)x_1), x_1\rangle -$$

$$- \langle A(t_0)(\dot{H}_0(t_0)x_0 + \dot{H}_1(t_0)x_1), x_0\rangle + \langle C(t_1)x_1, x_1\rangle -$$

$$- \langle C(t_0), x_0, x_0\rangle,\ A(t) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t),\ 2C(t) = \hat{L}^*_{x\dot{x}}(t) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t),$$

H_i — матричное решение уравнения Якоби с условием $H_i(t_j) = \delta_{ij}I$.

Достаточные условия сильного минимума. *Пусть $\mathscr{U} = V \times \mathbf{R}^n$, $V \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^{n+1})$, интегрант $L \in C^4(\mathscr{U})$ и квазирегулярен на V. Тогда при условии, что $\hat{x}(\cdot) \in C^3([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, на $\hat{x}(\cdot)$ удовлетворяются уравнение Эйлера, условие трансверсальности, усиленные условия Лежандра и Якоби и форма $P + Q$ положительно определена, то $\hat{x}(\cdot)$ доставляет сильный минимум задаче* (3).

И здесь выделим случай квадратичных функционалов в отдельную теорему.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (3) *интегральный функционал имеет вид* (1) *п.* 5.5.1, *причем матрицы A и C непрерывно дифференцируемы, а B непрерывна, терминант $l(x_0, x_1) = \langle \alpha x_0, x_0\rangle + 2\langle \gamma x_0, x_1\rangle + \langle \beta x_1, x_1\rangle$, где α, β, γ — матрицы размера $n \times n$. Пусть, кроме того, выполнено усиленное условие Лежандра $A(t) > 0$. Тогда, если в интервале (t_0, t_1) есть сопряженная точка, то значение задачи равно $-\infty$. Если же выполнено усиленное условие Якоби и матрица $P + Q$, введенная выше, неотрицательно определена, то допустимая экстремаль есть $\hat{x}(\ ) \equiv 0$.*

Теоремы 1, 2 пп. 5.5.1, 5.5.2 будут доказаны в § 10. Там же будет выведено необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума.

5.5.3. Теорема Боголюбова. Читатель мог заметить, что в наших теоремах необходимые и достаточные условия различны: квазирегулярность не фигурирует в необходимых условиях, но присутствует в достаточных. Из нижеследующей теоремы вытекает, что с теоретической точки зрения интегранты в задачах вариационного исчисления можно считать квазирегулярными: заменяя интегрант его квазирегуляризацией, т. е. овыпуклением по производным, мы получаем новую задачу, у которой имеется то же самое численное значение, что и у первоначальной.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n+1})$, $L\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ — *непрерывный интегрант*, $\tilde{L}(t, x, \cdot)$ — *вторая сопряженная (в смысле выпуклого анализа (см. п. 3.1.2)) функции* $\dot{x} \mapsto L(t, x, \dot{x})$,

$$\tilde{\mathcal{J}}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, x, \dot{x})\, dt \to \inf;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (\tilde{з})$$

— *простейшая задача с интегрантом* $\tilde{L}$. *Тогда численное значение в задаче*

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \to \inf;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (з)$$

совпадает с численным значением задачи $(\tilde{з})$. *Более того, для любой функции* $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, *существует последовательность* $\{x_n(\cdot)\}_{n \geqslant 1}$ *такая, что* $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$ *в пространстве* $C([t_0, t_1])$ *и* $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{J}(x_n(\cdot)) = \tilde{\mathcal{J}}(x(\cdot))$.

Из сформулированной теоремы немедленно вытекает, что численное значение в примере 2 п. 5.3 равно $-\infty$. В примере 6 того же пункта невыпуклость интегранта явилась причиной несуществования решения. Там же была построена последовательность функций, сходящаяся к функции, тождественно равной нулю, со значениями интегралов, стремящимися к численному значению задачи. Подобный метод применяется и при доказательстве теоремы Боголюбова.

5.6. Теория поля. Уравнение Гамильтона — Якоби.

5.6.1. Поле, функция наклона поля и S-функция.

Пусть

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt,\ L\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R},\ \mathcal{U} \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n+1}),$$

есть функционал простейшей задачи классического вариационного исчисления и $\widehat{x}(\cdot)$ — некоторая экстремаль этого функционала из семейства экстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$, $x(\cdot, \lambda) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, с параметром $\lambda \in \Lambda \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$.

Будем говорить, что $\widehat{x}(\cdot)$ *окружена полем экстремалей* $x(t, \lambda)$, если существует окрестность G графика $\Gamma_{\widehat{x}} = \{(t, \widehat{x}(t)) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, t_1]\}$ такая, что для любой точки (τ, ξ) из этой окрестности имеется единственная экстремаль семейства, проходящая через эту точку. Точнее, существует функция $\lambda\colon G \to \mathbf{R}^n$, $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$, класса $C^1(G)$ такая, что $x(\tau, \lambda) = \xi \Leftrightarrow \lambda = \lambda(\tau, \xi)$. Функция $u\colon G \to \mathbf{R}^n$, $u(\tau, \xi) = \frac{d}{dt} x(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau}$, называется *функцией наклона поля.*

Если существует такая точка (t_*, x_*), что $x(t_*, \lambda) = x_*$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то говорят, что $\widehat{x}(\cdot)$ *окружена центральным полем экстремалей.* Точка (t_*, x_*) называется *центром поля,* семейство $x(t, \lambda)$ — *центральным полем экстремалей.*

Пример. $\mathcal{K}(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt$ (гармонический осциллятор).

Экстремали этого функционала имеют вид $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Совокупность экстремалей $x(t, \lambda) = \lambda \sin t$ есть центральное поле экстремалей с центром в точке $(0, 0)$, включающее, в частности, экстремаль $\widehat{x}(t) \equiv 0$, покрывающее полосу $0 < t < \pi$. Функция наклона поля $u(\tau, \xi)$, $0 < \tau < \pi$, вычисляется так: надо взять экстремаль поля, проходящую через точку (τ, ξ) (т. е. $\xi \sin t/\sin \tau$), и вычислить производную этой экстремали в точке τ. Таким образом, $u(\tau, \xi) = \xi \operatorname{ctg} \tau$.

В п. 10.3.1 будет доказано, что если $L \in C^4(\mathcal{U})$, $\widehat{x}(\cdot) \in C^3([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ — экстремаль функционала $\mathcal{J}$ и выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, то экстремаль $\widehat{x}(\cdot)$ можно окружить (центральным) полем экстремалей.

Отметим геометрический смысл сопряженной точки при $n=1$. Сопряженная точка — это точка пересечения «бесконечно близких» экстремалей. А именно, если рассмотреть центральное поле экстремалей $x(\cdot, \lambda)$, удовлетворяющее условиям $x(t_*, \lambda) = \widehat{x}(t_*)$, $\dot{x}(t_*, \lambda) = \dot{\widehat{x}}(t_*) + \lambda$, то сопряженные точки — это точки пересечения экстремали с огибающей полученного семейства. Иначе говоря, надо решить уравнения $x_\lambda(t, \lambda) = 0$. Подробнее об этом см., например, в [1, с. 67].

Пусть $x(\cdot, \lambda)$ — центральное поле, окружающее экстремаль $\widehat{x}(\cdot)$ функционала $\mathcal{J}$. Положим

$$S(\tau, \xi) = \int_{t_*}^{\tau} L(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)))\, dt.$$

Эту функцию называют *S-функцией центрального поля* $x(\cdot, \lambda)$. В п. 10.3.1 будет доказано, что (при указанных выше допущениях на гладкость L и $\widehat{x}(\cdot)$) дифференциал функции S имеет вид

$$dS(\tau, \xi) = -H(\tau, \xi)d\tau + \langle p(\tau, \xi), d\xi\rangle,$$

где $p(\tau, \xi) = L_{\dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), H(\tau, \xi) = \langle p(\tau, \xi), u(\tau, \xi)\rangle - -L(\tau, \xi, u(\tau, \xi))$.

В рассмотренном выше примере (гармоническом осцилляторе) для введенного там центрального поля $S(\tau, \xi) = \frac{\xi^2}{2} \operatorname{ctg} \tau$.

5.6.2. Основная формула Вейерштрасса. Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция n переменных. Функцию

$$\mathscr{E}(x, x') = f(x') - f(x) - \langle f'(x), x' - x\rangle \qquad (1)$$

назовем *функцией Вейерштрасса*, соответствующей f. Геометрический смысл $\mathscr{E}$ таков: $\mathscr{E}(x, x')$ — это разность в точке x' между значением f и значением аффинной функции, касательной к графику f в точке x. Отсюда ясно, что если f выпукла, то

$$\mathscr{E}(x, x') \geqslant 0 \quad \forall x, x' \in \mathbf{R}^n.$$

Можно показать, что верно и обратное.

Пусть L — интегрант функционала $\mathcal{J}$ простейшей задачи классического вариационного исчисления. Функция

$$\mathcal{E}(t, x, u, \dot{x}) = L(t, x, \dot{x}) - L(t, x, u) - \langle L_{\dot{x}}(t, x, u), \dot{x} - u\rangle \tag{1'}$$

называется *функцией Вейерштрасса* функционала $\mathcal{J}$. Из сопоставления (1) и (1′) видно, что $\mathcal{E}(t, x, \cdot, \cdot)$ — функция Вейерштрасса функции $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$, где t, x играют роль параметров.

Из сказанного следует, что квазирегулярность (регулярность) интегранта L в области V (п. 5.5.1) равносильна тому, что

$$\mathcal{E}(t, x, u, \dot{x}) \geqslant 0 \quad (\mathcal{E}(t, x, u, \dot{x}) > 0, \ \ \dot{x} \neq u)$$
$$\forall\, (t, x) \in V, \ \ (u, \dot{x}) \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Пусть экстремаль $\widehat{x}(\cdot)$ окружена центральным полем экстремалей $x(\cdot, \lambda)$ и $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ — некоторая функция, график которой расположен в достаточно малой окрестности графика $\Gamma_{\widehat{x}}$, и при этом $\widehat{x}(t_0) = x(t_0)$, $\widehat{x}(t_1) = x(t_1)$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} dS(t, \widehat{x}(t)) \overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (-H(t, \widehat{x}(t)) +$$
$$+ \langle p(t, \widehat{x}(t)), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle)\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) -$$
$$- \langle p(t, \widehat{x}(t)), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle + \langle p(t, \widehat{x}(t)), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle)\, dt = \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)).$$

Отсюда

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} (L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L(t, x(t), u(t, x(t))) -$$
$$- \langle \dot{x} - u(t, x(t)), L_{\dot{x}}(t, x(t), u(t, x(t)))\rangle)\, dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t))\, dt.$$

Эту формулу называют *основной формулой Вейерштрасса*.

В рассмотренном выше примере (гармоническом осцилляторе) для $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $T_0 < \pi$ получаем тождество

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} (\dot{x}(t) - \operatorname{ctg}(t+\varepsilon)x(t))^2 dt,$$

имеющее место для любой функции $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$, $x(0) = x(T_0) = 0$, если только ε настолько мало, что $T_0 + \varepsilon < \pi$.

5.6.3. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби. Пусть $\mathscr{I}$ — функционал, определенный в п. 5.6.1, с регулярным интегрантом L. Тогда соотношения

$$p(t, x) = L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x)),$$

$$-H(t, x) = L(t, x, u(t, x)) - \langle p(t, x), u(t, x)\rangle,$$

полученные в п. 5.6.1, означают, что преобразование Лежандра — Юнга — Фенхеля функции $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$, которую мы обозначим $\mathscr{H}(t, x, p)$, обладает тем свойством, что $\mathscr{H}(t, x, p(t, x)) = H(t, x)$. Но это значит, что S-функция центрального поля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + \mathscr{H}\left(t, x, \frac{\partial S(t, x)}{\partial x}\right) = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Этому уравнению удовлетворяют многие S-функции, построенные по другим полям (не обязательно центральным).

В рассмотренном выше примере (гармоническом осцилляторе) уравнение Гамильтона — Якоби приобретает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2\right) = 0.$$

Якоби принадлежит метод нахождения общего решения уравнения Эйлера с помощью интегрирования уравнения Гамильтона — Якоби.

Теорема Якоби. *Пусть семейство функций $S(t, x, \alpha)$, зависящее от параметра $\alpha \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) уравнению Гамильтона — Якоби*

$$\frac{\partial S(t, x, \alpha)}{\partial t} + \mathscr{H}\left(t, x, \frac{\partial S(t, x, \alpha)}{\partial x}\right) = 0$$

для всех значений параметра α в некоторой окрестности точки α_0. Если функция S дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности $V \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ точки (t_0, x_0, α_0) и при этом в этой окрестности $\det\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}\right| \neq 0$, *то соотношения $S_\alpha = \beta$ представляют в некоторой окрестности точки t_0 общее решение уравнения Эйлера* [2, с. 95].

В рассмотренном выше примере (гармоническом осцилляторе) ищем полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби в виде $S = g(t) + f(x)$. Тогда

$$g'(t) + \frac{1}{2}\left(x^2 + f'^2(x)\right) = 0 \Rightarrow g(t) = -\frac{\alpha^2 t}{2} + a_1,$$

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz + a_2.$$

Из уравнения $S_\alpha = \beta$ получаем

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(-\frac{\alpha^2 t}{2} + \int_0^x \sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz + a\right) \Rightarrow \dot{x} = C \sin(t + \gamma).$$

Мы получили общее решение уравнения Эйлера.

5.7. Примеры.

Пример 1.

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \inf;\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi,\ \ T_0 > 0$$

(гармонический осциллятор).

Решение. 1. $L = \dot{x}^2 - x^2$.

2. Необходимое условие — уравнение Эйлера $\ddot{x} + x = 0$.

3. Общее решение уравнения Эйлера: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

4. Применим достаточные условия. Условие Лежандра выполнено, ибо $L_{\dot{x}\dot{x}} \equiv 2 > 0$. Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби здесь совпадает с уравнением Эйлера. Решение h уравнения Якоби с условиями $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) \neq 0$ есть $h(t) = A \sin t$, $A \neq 0$. Точки — сопряженные с точкой нуль — нули уравнения $\sin t = 0$. Ближайшая к нулю точка — сопряженная точке t_0 — это π.

Ответ. Из теоремы 2 п. 5.5.1 следует, что если $T_0 < \pi$, то $\hat{x}(t) = \xi \sin t / \sin T_0 \in \mathrm{abs\,min}$; если $T_0 > \pi$, то

$S_{\min} = -\infty$. При $T_0 = \pi$, $\xi = 0$ допустимые экстремали имеют вид $\widehat{x}(t) = C\sin t$, $S_{\min} = 0$; при $\xi \neq 0$ $S_{\min} = -\infty$.

Пример 2.

$$\int\limits_0^{T_0} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2\right) dt \to \text{extr};$$

$$x_i(0) = x_{i0},\ x_i(T_0) = x_{i1}, \quad i = 1, 2.$$

Решение. 1. Интегрант: $L = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$.

2. Необходимое условие — система уравнений Эйлера

$$\ddot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{x}_2 = x_1 \Rightarrow \ddddot{x}_1 = x_1, \quad \ddddot{x}_2 = x_2.$$

3. Общее решение системы уравнений Эйлера: $x_1(t) = C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t + C_3 \sin t + C_4 \cos t$, $x_2(t) = C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t - C_3 \sin t - C_4 \cos t$.

4. Применим достаточные условия. Условие Лежандра выполнено, ибо матрица $A = I$ — единичная. Система уравнений Якоби совпадает с системой уравнений Эйлера. В качестве $H(t, 0)$ возьмем матрицу

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sh} t & \sin t \\ \operatorname{sh} t & -\sin t \end{bmatrix}.$$

При этом

$$\det \dot{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \det H(t, 0) = -2 \operatorname{sh} t \sin t.$$

Сопряженные точки: $\tau = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$.

Ответ. При $T_0 < \pi$ существует единственная экстремаль, доставляющая абсолютный минимум; при $T_0 > \pi$ $S_{\min} = -\infty$. Случай $T_0 = \pi$ требует дополнительного исследования, $S_{\max} = \infty$.

Пример 3.

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt + \alpha x^2(0) + \beta x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\gamma x(0)\, x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \inf.$$

Решение. 1. Интегрант: $L = \dot{x}^2 - x^2$; терминант: $l = \alpha x^2(0) + \beta x^2(\pi/2) + 2\gamma x(0)x(\pi/2)$.

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера $\ddot{x} + x = 0$;

б) трансверсальность по x:

$$\dot{x}(0) = \alpha x(0) + \gamma x(\pi/2), \quad \dot{x}(\pi/2) = -\beta x(\pi/2) - \gamma x(0).$$

3. Общее решение уравнения Эйлера: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Допустимые экстремали: если $(\gamma - 1)^2 - \alpha\beta \neq 0$, то $\widehat{x}(t) \equiv 0$; если $(\gamma - 1)^2 - \alpha\beta = 0$, то получается семейство допустимых экстремалей, зависящее от параметра.

4. Применим достаточные условия. Усиленное условие Лежандра $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$ выполнено, и, более того, интегрант L квазирегулярен. Уравнение Якоби совпадает с уравнением Эйлера. Решением уравнения Якоби $\ddot{h} + h = 0$ с краевыми условиями $h_0(\pi/2) = 0$, $h_0(0) = 1$ и $h_1(0) = 0$, $h_1(\pi/2) = 1$ являются функции $h_0 = \cos t$, $h_1 = \sin t$. Квадратичная форма $P + Q$ имеет вид

$$P + Q = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\gamma - 2 \\ 2\gamma - 2 & 2\beta \end{bmatrix}.$$

Эта форма положительно определена при $\alpha > 0$ и $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 > 0$, не является неотрицательно определенной при $\alpha < 0$ или $\alpha > 0$ и $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 < 0$.

Ответ. $\alpha > 0$ и $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 > 0 \Rightarrow \widehat{x}(t) \equiv 0 \in \mathrm{abs\,min}$;

$\alpha > 0$ и $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 < 0$ или $\alpha < 0 \Rightarrow \widehat{x}(t) \notin \mathrm{loc\,extr}$; $S_{\min} = -\infty$;

$\alpha > 0$ и $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 = 0$ или $\alpha = 0$ и $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 > 0 \Rightarrow$ требуется дополнительное исследование.

Задачи

Решить задачи Больца 5.1—5.7.

5.1. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to \mathrm{extr}$.

5.2. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\, dt - 2x(1) \operatorname{sh} 1 \to \mathrm{extr}$.

5.3. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4x \sin t) dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to \mathrm{extr}$.

5.4. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \mathrm{extr}$.

5.5. (Р) $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt + \alpha x^2(T_0) \to \mathrm{extr}$.

5.6. $\int\limits_0^1 (\dot x_1 \dot x_2 + x_1 x_2)\,dt + x_1(0)\,x_2(1) + x_1(1)\,x_2(0) \to \mathrm{extr}.$

5.7. $\int\limits_1^e 2\dot x\,(t\dot x + x)\,dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \mathrm{extr}.$

В задачах Больца 5.8—5.10 найти допустимые экстремали.

5.8. $\int\limits_0^3 4\dot x^2 x^2 dt + x^4(0) - 8x(3) \to \mathrm{extr}.$

5.9. $\int\limits_0^1 e^x \dot x^2 dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \mathrm{extr}.$

5.10. $\int\limits_0^1 e^{t+1}\,(\dot x^2 + 2x^2)\,dt + 2x(1)\,(x(0) + 1) \to \mathrm{extr}.$

Решить простейшие задачи классического вариационного исчисления 5.11—5.80.

5.11. $\int\limits_0^1 \dot x^2 dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 1,\quad x(1) = 0.$

5.12. $\int\limits_0^{T_0} \dot x^2 dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\quad x(T_0) = \xi.$

5.13. $\int\limits_0^1 (x - \dot x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = x(1) = 0.$

5.14. $\int\limits_0^{T_0} (\dot x^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\quad x(T_0) = \xi.$

5.15. $\int\limits_0^1 (\dot x^2 + tx)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.16. $\int\limits_0^1 (t^2 x - \dot x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.17. $\int\limits_0^{T_0} \dot x^3 dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.18. $\int\limits_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x)\,dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0, \ x\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$

5.19. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^3 - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0, \ x(T_0) = \xi.$

5.20. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^3 + x^2)\,dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0, \ x(T_0) = \xi.$

5.21. $\int\limits_1^{e} t\dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(1) = 0, \ x(e) = 1.$

5.22. $\int\limits_0^{1} (1 + t)\dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0, \ x(1) = 1.$

5.23. $\int\limits_1^{e} (t\dot{x}^2 + 2x)\,dt \to \text{extr}; \ x(1) = 1, \ x(e) = 0.$

5.24. $\int\limits_1^{e} (x - t\dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}; \ x(1) = 1, \ x(e) = 2.$

5.25. $\int\limits_1^{2} t^2\dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(1) = 3, \ x(2) = 1.$

5.26. $\int\limits_2^{3} (t^2 - 1)\dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(2) = 0, \ x(3) = 1.$

5.27. $\int\limits_1^{e} (2x - t^2\dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}; \ x(1) = e, \ x(e) = 0.$

5.28. $\int\limits_0^{1} x^2\dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(0) = 1, \ x(1) = \sqrt{2}.$

5.29. (P) $\int\limits_0^{4/3} \frac{x}{\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr}; \ x(0) = 1, \ x\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9}.$

5.30. $\int\limits_0^{1} e^x\dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0, \ x(1) = \ln 4.$

5.31. $\int\limits_0^{1} (\dot{x}^2 + x\dot{x} + 12tx)\,dt \to \text{extr}; \ x(0) = x(1) = 0.$

5.32. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + x\dot{x})\,dt \to \text{extr};\ x(1) = 0,\ x(e) = 1.$

5.33. $\int\limits_0^1 (t^2\dot{x}^2 + 12x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$

(пример Гильберта).

5.34. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(-1) = x(1) = 1.$

5.35. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(-1) = -1,\ x(1) = 1.$

5.36. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2x)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.37. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + tx)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.38. $\int\limits_0^1 (4x\sin t - x^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.39. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 6x\,\mathrm{sh}\,2t)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.40. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.41. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 + 6x\,\mathrm{sh}\,2t)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.42. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{sh}\,t)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = -1,\ x(1) = 0.$

5.43. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{sh}\,t)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.44. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \operatorname{ch} t)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = x(1) = 0.$

5.45. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \operatorname{ch} t)\, dt \to \operatorname{extr};$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.46. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = 1,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.47. $\int\limits_0^{\pi/4} (4x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = 1,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

5.48. $\int\limits_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

5.49. $\int\limits_0^{3\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$

5.50. $\int\limits_0^{\pi/2} (2x + x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.51. $\int\limits_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\, dt \to \operatorname{extr};$

$x(0) = 0,\ x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

5.52. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.53. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \operatorname{sh} t)\, dt \to \operatorname{extr};\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.54. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \operatorname{sh} t)\, dt \to \operatorname{extr};$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.55. $\int\limits_0^{\pi/2} (6x \sin 2t + x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.56. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - 6x \sin 2t)\, dt \to \text{extr};$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.57. $\int\limits_0^{\pi/2} (4x \sin t + x^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.58. $\int\limits_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 4x \sin t)\, dt \to \text{extr};\ x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

5.59. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \cos t)\, dt \to \text{extr};\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.60. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \cos t)\, dt \to \text{extr};$

$x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

5.61. $\int\limits_0^{3\pi/2} (x^2 - 4x \cos t - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$x(0) = 0,\ x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}.$

5.62. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \cos t)\, dt \to \text{extr};$

$x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.63. $\int\limits_0^{1} (\dot{x}^2 + 3x^2)\, e^{2t}\, dt \to \text{extr};\ x(0) = 1,\ x(1) = e.$

5.64. $\int\limits_0^{1} (x^2 - \dot{x}^2)\, e^{2t}\, dt \to \text{extr};\ x(0) = 0,\ x(1) = e.$

5.65. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\, e^{2t}\, dt \to \text{extr};\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

5.66. $\int\limits_0^1 \sin \dot{x} dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(1) = \frac{\pi}{2}$.

5.67. $\int\limits_0^1 \cos \dot{x} dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(1) = \pi$.

5.68. $\int\limits_0^{T_0} \sin \dot{x} dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi$.

5.69. $\int\limits_0^{T_0} \cos \dot{x} dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi$.

5.70. $\int\limits_0^{T_0} \dot{x} e^{\dot{x}} dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi$.

5.71. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^5 + 5x) \, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi$.

5.72. (P) $\int\limits_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(1) = \xi$.

5.73. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x\dot{x}^3) \, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(T_0) = 0$ (исследовать на экстремум допустимую экстремаль $\widehat{x}(t) \equiv 0$).

5.74. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - 4\dot{x}^3 x + 2t\dot{x}^4) \, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$ (исследовать на экстремум допустимую экстремаль $\widehat{x}(t) \equiv 0$).

5.75. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} \, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1, \; x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.76. $\int\limits_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} \, dt \to \text{extr}; \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; x(1) = 1$.

5.77. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} \, dt \to \text{extr}; \quad x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1$ $(x_0 > 0, \; x_1 > 0)$.

5.78. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr};\ x(T_0) = x(-T_0) = \xi$

(задача о минимальной поверхности вращения).

5.79. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}\,dt \to \text{extr};\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$

$(x_0 > 0,\ x_1 > 0)$ (задача о брахистохроне).

5.80. $\int\limits_0^{T_0} \sqrt{x+h}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \inf;\ x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

В задачах 5.81—5.86 найти допустимые экстремали.

5.81. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2)\,dt \to \text{extr};$

$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = \operatorname{sh} 1,\ x_2(1) = -\operatorname{sh} 1.$

5.82. $\int\limits_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2)\,dt \to \text{extr};$

$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = x_2(1) = \operatorname{sh} 1.$

5.83. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1x_2)\,dt \to \text{extr};$

$x_1(0) = x_2(0) = 1,\ x_1(1) = e,\ x_2(1) = \frac{1}{e}.$

5.84. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)\,dt \to \text{extr};$

$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

5.85. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6x_1t + 12x_2t^2)\,dt \to \text{extr};$

$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = x_2(1) = 1.$

5.86. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3)\,dt \to \text{extr};\ x_1(0) =$
$= x_3(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\ x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},\ x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$

Решить задачи с подвижными концами 5.87—5.107.

5.87. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 1$.

5.88. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt + \alpha x^2(1) \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$.

5.89. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$, $T + x(T) + 1 = 0$.

5.90. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$, $(T - 1)x^2(T) + 2 = 0$.

5.91. $\int_0^T \dot{x}^3 dt \to \mathrm{extr}$; $T + x(T) = 1$, $x(0) = 0$.

5.92. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(1) = 0$.

5.93. (P) $\int_0^{T_0} (x - \dot{x}^2)dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$.

5.94. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 1$.

5.95. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(T) = T$.

5.96. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

5.97. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$, $x(T) = T$.

5.98. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x + 2)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$.

5.99. $\int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 1$.

5.100. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = 0$.

5.101. $\int\limits_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0.$

5.102. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x\sin t)\,dt \to \mathrm{extr};\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5.103. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 1.$

5.104. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{sh}\,t)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0.$

5.105. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{ch}\,t)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(1) = 0.$

5.106. (P) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\,dt - x^2(1) \to \mathrm{extr};\ x(0) = 1.$

5.107. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0,\ x(T) = 1.$

В задачах 5.108—5.115 найти допустимые экстремали.

5.108. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(T) + T - 1 = 0.$

5.109. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0.$

5.110. $\int\limits_0^T \sqrt{1 + \dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0,\ T^2 x(T) = 1.$

5.111. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 1.$

5.112. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 1,\ T - x(T) = 1.$

5.113. $\int\limits_0^{T_0} x\sqrt{1 + \dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr};\ x(T_0) = \xi.$

5.114. $\int\limits_0^1 \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - x_1 x_2\right) dt \to \mathrm{extr};\ x_1(1) = x_2(1) = 1.$

5.115. $\int\limits_0^1 \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - x_1 x_2\right) dt \to \mathrm{extr};\ x_1(0) = x_2(0) = 1.$

В задачах 5.116 — 5.120 выписать уравнение Гамильтона — Якоби.

5.116. $\int \frac{\dot{x}^2}{2}\, dt.$

5.117. $\frac{1}{2}\int \left(\dot{x}^2 + x^2\right) dt.$

5.118. $\frac{1}{2}\int \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt.$

5.119. $\int x^p \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt.$

5.120. $\int e^{\dot{x}} dt.$

В задачах 5.121 — 5.126 найти общее решение уравнения Эйлера, решая уравнение Гамильтона — Якоби.

5.121. $\frac{1}{2}\int \dot{x}^2 dt.$

5.122. $\frac{1}{2}\int \left(\dot{x}^2 + x^2\right) dt.$

5.123. $\frac{1}{2}\int \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt.$

5.124. $\int \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x}\, dt.$

5.125. $\int x^p \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt.$

5.126. (Р) $\int \sqrt{t^2 + x^2}\sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt.$

§ 6. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

6.1. Принцип Лагранжа для изопериметрических задач.

6.1.1. Постановка задачи. *Изопериметрической задачей* (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве

$C^1([t_0, t_1])$ (или $KC^1([t_0, t_1])$):

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \operatorname{extr}; \tag{з}$$

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{2}$$

Здесь f_i: $\mathbf{R}^3 \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$,— функции трех переменных. Константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — заданные фиксированные числа.

Ограничения вида (1) называются *изопериметрическими*. Функции f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, называются *интегрантами*. Функции $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющие изопериметрическим условиям (1) и условиям на концах (2), называются *допустимыми*.

Будем говорить, что допустимая функция $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет в задаче (з) *слабый локальный минимум* (*максимум*), и писать $\widehat{x}(\cdot) \in \operatorname{loc\,min} з$ ($\operatorname{loc\,max} з$), если существует $\delta > 0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\cdot)$, для которой $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$, выполняется неравенство

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}_0(\widehat{x}(\cdot)) \ (\mathcal{J}_0(x(\cdot)) \leqslant \mathcal{J}_0(\widehat{x}(\cdot))).$$

6.1.2. Правило решения.

1. Составить лагранжиан:

$$L = L(t, x, \dot{x}, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}), \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

2. Выписать необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера для лагранжиана L:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{i\dot{x}}(t)\right) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{ix}(t) = 0.$$

3. Найти допустимые экстремали, т. е. допустимые решения уравнения Эйлера для лагранжиана L при векторе множителей Лагранжа λ, не равном нулю. При этом бы-

вает полезно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой, отличной от нуля константе.

4. Отыскать решение среди найденных допустимых экстремалей или доказать, что решения нет.

6.1.3. Правило множителей Лагранжа.

Теорема. *Пусть $\mathcal{U}$ — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^3$, f_i: $\mathcal{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — функции, непрерывные в $\mathcal{U}$ вместе со своими частными производными f_{ix} и $f_{i\dot{x}}$ (условие гладкости), $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, $\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\right) \in \mathcal{U}$ $\forall t \in [t_0, t_1]$.*

Тогда, если функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет слабый локальный экстремум в изопериметрической задаче (3), *то найдутся множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что для лагранжиана $L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$ выполнено уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0.$$

Если выполнено условие регулярности, состоящее в том, что функции $-\frac{d}{dt}\hat{f}_{i\dot{x}}(t) + \hat{f}_{ix}(t)$, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы, то $\lambda_0 \neq 0$.

Эта теорема является очевидным следствием теоремы п. 2.3.3, где сформулирован принцип Лагранжа для задач с равенствами и неравенствами. Однако мы даем ниже ее непосредственное доказательство.

$\lhd$ А) Вычисление вариаций по Лагранжу функционалов $\mathcal{J}_i$. Напомним, что согласно § 1 вариацией по Лагранжу функционала $\mathcal{J}$ в точке $\hat{x}(\cdot)$ называется функционал $x(\cdot) \to \delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot), x(\cdot))$, определяемый по формуле $\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot), x(\cdot)) = \lim\limits_{\lambda\to 0} (\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)))/\lambda$.

Фактически вариации интегральных функционалов вариационного исчисления были вычислены нами в пп. 5.1.3, 5.2.3. Применяя дифференцирование под знаком интеграла, аналогично тому, как это было сделано выше, приходим к формуле

$$\delta\mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{f}_{i\dot{x}}(t)\dot{x}(t) + \hat{f}_{ix}(t)\,x(t)\right) dt,$$
$$i = 0, 1, \ldots, m.$$

Б) Построение конечномерного отображения и выделение вырожденного и регулярного случаев. Рассмотрим следующее линейное отображение пространства $C_0^1([t_0, t_1]) = \{x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]) \mid x(t_0) = x(t_1) = 0\}$ в $\mathbf{R}^{m+1}$:

$$Ax(\cdot) = (\delta\mathcal{J}_0(\widehat{x}(\cdot), x(\cdot)), \delta\mathcal{J}_1(\widehat{x}(\cdot), x(\cdot)) \ldots, \delta\mathcal{J}_m(\widehat{x}(\cdot), x(\cdot))).$$

Возможны два случая:

а) отображение A является отображением на все $\mathbf{R}^{m+1}$, т. е. $\operatorname{Im} A = \mathbf{R}^{m+1}$ (регулярный случай);

б) отображение A является отображением на часть $\mathbf{R}^{m+1}$ (вырожденный случай).

В) Доказательство теоремы в вырожденном случае. Образ линейного пространства при линейном отображении является, как известно, подпространством. Значит, в вырожденном случае $\operatorname{Im} A$ есть собственное подпространство в $\mathbf{R}^{m+1}$. Но тогда по лемме о нетривиальности аннулятора в конечномерном пространстве (п. 1.3.1) найдутся такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i z_i = 0 \quad \forall z = (z_0, z_1, \ldots, z_m) \in \operatorname{Im} A.$$

Теперь, если вспомнить определение оператора A и выражение для $\delta\mathcal{J}_i(\widehat{x}(\cdot), x(\cdot))$, то получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left(\widehat{f}_{i\dot{x}}(t)\, \dot{x}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)\, x(t) \right) \right) dt = 0$$

$$\forall x(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Но тогда из леммы Дюбуа — Реймона (п. 5.1.3) следует, что $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{i\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ и, значит,

$$-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{i\dot{x}}(t) \right) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{ix}(t) = 0.$$

Г) Невозможность регулярного случая. Выберем $x_j(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1])$ так, чтобы $Ax_j(\cdot) = e_j$, где $e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ — канонический базис в $\mathbf{R}^{m+1}$. Рассмотрим отображение Φ окрестности нуля из $\mathbf{R}^{m+1}$ в $\mathbf{R}^{m+1}$:

$$\Phi(\beta) = (\varphi_0(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m), \varphi_1(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m), \ldots \\ \ldots, \varphi_m(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)),$$

где

$$\varphi_i(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathcal{J}_i\left(\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j(\cdot)\right), \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Нетрудно проверить, что функции φ_i непрерывно дифференцируемы и при этом

$$\frac{\partial \varphi_i(0)}{\partial \beta_j} = \delta \mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot), x_j(\cdot)) = \delta_{ij}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant m,$$

$$\Phi(0) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{z}, \quad \alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot)).$$

По теореме об обратной функции (п. 1.5.3) существуют обратное гладкое отображение Φ^{-1} и константа $K > 0$ такие, что

$$|\Phi^{-1}(z)| \leqslant K|z - \hat{z}|$$

при малых $z - \hat{z}$. В частности, для любого достаточно малого по модулю ε найдется такой вектор $\beta(\varepsilon) = (\beta_0(\varepsilon), \ldots$ $\ldots, \beta_m(\varepsilon))$, что $\beta(\varepsilon) = \Phi^{-1}((\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_m))$, т. е.

$$\varphi_0(\beta(\varepsilon)) = \alpha_0 + \varepsilon \Leftrightarrow \mathcal{J}_0\left(\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) x_j(\cdot)\right) = \mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot)) + \varepsilon,$$

$$\varphi_i(\beta(\varepsilon)) = \alpha_i \Leftrightarrow \mathcal{J}_i\left(\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) x_j(\cdot)\right) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и при этом

$$|\beta(\varepsilon)| = |\Phi^{-1}(\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)| \leqslant K|\varepsilon|.$$

Получилось, что в любой окрестности функции $\hat{x}(\cdot)$ (в пространстве $C^1([t_0, t_1])$) существует допустимая функция (а именно $\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) x_j(\cdot)$ при достаточно малом ε), для которой значение функционала как больше, так и меньше, чем $\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot))$. Пришли к противоречию с допущением, что $\hat{x}(\cdot) \in \operatorname{loc\,extr}$. $\triangleright$

6.1.4. Пример.

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \operatorname{extr}; \quad \int_0^1 x\,dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение. 1. Лагранжиан: $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda x$.

2. Необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t) + L_x(t) = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda = 0.$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ — все множители Лагранжа — нули. В этом случае допустимых экстремалей нет. Положим $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $\ddot{x} = \lambda$. Общее решение: $x = C_1t^2 + C_2t + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условий на концах и изопериметрических условий

$$\left.\begin{aligned} x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0, \\ x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \\ \int_0^1 x\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 (C_1t^2 + C_2t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} C_1 = 3, \\ C_2 = -2. \end{aligned}$$

В задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} = 3t^2 - 2t$.

4. Покажем, что $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет абсолютный минимум. Действительно, возьмем допустимую функцию $x(\cdot)$; тогда $x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot) = h(\cdot) \in C_0^1([0, 1])$ и $\int_0^1 h\,dt = 0$. Далее,

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \left(\dot{\widehat{x}} + \dot{h}\right)^2 dt - \int_0^1 \dot{\widehat{x}}^2 dt =$$

$$= \int_0^1 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}\,dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geqslant 2\int_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h}\,dt = \int_0^1 \dot{\widehat{x}}\,dh = \dot{\widehat{x}}(t)\,h(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ddot{\widehat{x}}\,h\,dt = -6\int_0^1 h\,dt = 0.$$

Таким образом, $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции $x(\cdot)$. Нетрудно получить, что $S_{\min} = \int_0^1 \dot{\widehat{x}}^2 dt =$

$$= \int_0^1 (6t - 2)^2\,dt = 4.$$

Ответ. Функция $\widehat{x} = 3t^2 - 2t$ доставляет в задаче абсолютный минимум; значение задачи $S_{\min} = 4$; очевидно, что $S_{\max} = +\infty$.

6.2. Необходимые условия высших порядков и достаточные условия.

6.2.1. Теория. Рассмотрим изопериметрическую задачу

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot)) \to \inf;\ \mathcal{J}_i(x(\cdot)) = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m;$$
$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{з}$$

где

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, \dot{x})\, dt, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

$$f_i\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}, \quad \mathcal{U} \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^3).$$

Будем далее предполагать, что интегранты f_i по меньшей мере принадлежат классу $C^2(\mathcal{U})$. Пусть $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ — экстремаль задачи (з) с $\lambda_0 = 1$, т. е. на ней выполнено уравнение Эйлера для интегранта $L = f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$ с некоторыми множителями Лагранжа λ_i. Говорят, что на $\hat{x}(\cdot)$ выполнено *условие Лежандра* (*усиленное условие Лежандра*), если

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0 \quad \left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0\right) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

При наших допущениях относительно гладкости интегрантов f_i функционал $\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$ имеет вторую производную по Фреше в точке $\hat{x}(\cdot)$:

$$\mathcal{K}(x(\cdot)) = \mathcal{J}''\left(\hat{x}(\cdot)\right)[x(\cdot), x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} (A\dot{x}^2 + 2C\dot{x}x + Bx^2)\, dt,$$

где $A(t) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t), C(t) = \hat{L}_{\dot{x}x}(t), B(t) = \hat{L}_{xx}(t)$.

Если $\hat{x}(\cdot) \in \operatorname{loc\,min}$ з, то по необходимому условию второго порядка в задачах с равенствами (п. 2.5.3) функция $\bar{x}(\cdot) \equiv 0 \in \operatorname{abs\,min}$ в задаче

$$\mathcal{J}''\left(\hat{x}(\cdot)\right)[x(\cdot), x(\cdot)] \to \inf;\ \mathcal{J}_i'\left(\hat{x}(\cdot)\right)[x(\cdot)] = 0;$$
$$x(t_0) = x(t_1) = 0.$$

Правило множителей Лагранжа, примененное к этой задаче, приводит к уравнению

$$-\frac{d}{dt}(A\dot{x}+C x)+C\dot{x}+Bx+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i=0,$$

где $g_i(t)=-\frac{d}{dt}\hat{f}_{i\dot{x}}(t)+\hat{f}_{ix}(t)$. Это уравнение называется (неоднородным) *уравнением Якоби* для (з) на экстремали $\hat{x}(\cdot)$.

Пусть на экстремали $\hat{x}(\ )$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется *сопряженной к точке* t_0, если существует нетривиальное решение h неоднородного уравнения Якоби, для которого

$$\int_0^{\tau} g_i(t)h(t)\,dt=0,\quad i=1,\ldots,m,\quad h(t_0)=h(\tau)=0.$$

Говорят, что на $\hat{x}(\ )$ выполнено *условие Якоби* (*усиленное условие Якоби*), если в интервале (t_0, t_1) (полуинтервале $(t_0, t_1]$) нет точек, сопряженных с t_0.

Дадим аналитическое средство нахождения сопряженных точек для случая, когда функции g_i, $i=1,\ldots,m$, линейно независимы на отрезках $[\tau_0,\tau_1]$, $t_0\leqslant\tau_0<\tau_1\leqslant t_1$. Пусть h_0 — решение однородного уравнения Якоби ($\mu_i=0$, $i=1,\ldots,m$) с краевыми условиями $h_0(t_0)=0$, $\dot{h}_0(t_0)=1$; $h_j(\cdot)$ — решение неоднородного уравнения Якоби с $\mu_j=1$, $\mu_i=0$, $i\neq j$, и краевыми условиями $h_j(t_0)=\dot{h}_j(t_0)=0$, $j=1,\ldots,m$. Нетрудно понять, что точка τ является сопряженной тогда и только тогда, когда матрица

$$H(\tau)=\begin{bmatrix} h_0(\tau)\ \ldots & h_m(\tau) \\ \int_{t_0}^{\tau} h_0 g_1\,dt\ \ldots & \int_{t_0}^{\tau} h_m g_1\,dt \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \int_{t_0}^{\tau} h_0 g_m\,dt\ \ldots & \int_{t_0}^{\tau} h_n g_m\,dt \end{bmatrix}$$

является вырожденной.

Теорема 1. Необходимые условия слабого минимума. *Пусть в задаче* (з) *интегранты* f_i, $i=0,1,\ldots,m$, *удовлетворяют условию гладкости* $f_i\in C^3(\mathcal{U})$. *Если* $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0, t_1])$ *доставляет слабый мини-*

мум (з) *и при этом имеет место условие регулярности, заключающееся в линейной независимости на любом отрезке* $[t_0, \tau]$, $[\tau, t_1]$ *при любом* τ *функций*

$$g_i(t) = -\frac{d}{dt}\hat{f}_{i\dot{x}}(t) + \hat{f}_{ix}(t), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

то $\hat{x}(\ )$ — *экстремаль задачи* (з), *на которой удовлетворяются условия Лежандра и Якоби.*

Достаточные условия сильного минимума. *Пусть* $\mathcal{U} = V \times \mathbf{R}$, $V \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^2)$, *интегрант* $L = f_0 + \sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i f_i \in C^4(\mathcal{U})$ *квазирегулярен для всех* $(t, x) \in V$ *и на допустимой экстремали* $\hat{x}(\cdot) \in C^3([t_0, t_1])$ *задачи* (з) *выполнены усиленные условия Лежандра, Якоби и условие регулярности. Тогда* $\hat{x}(\ )$ *доставляет сильный минимум.*

Теорема 2. *Пусть в задаче* (з) *функционал* $\mathcal{J}_0$ *квадратичен:*

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (A_0\dot{x}^2 + B_0x^2)\,dt,$$

функционалы $\mathcal{J}_i$ *линейны:*

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (a_i\dot{x} + b_ix)\,dt, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

причем функции $A_0, a_1, \ldots, a_m$ *непрерывно дифференцируемы, функции* $B_0, b_1, \ldots, b_m$ *непрерывны и выполнены усиленное условие Лежандра и условие регулярности. Тогда, если не выполнено условие Якоби, т. е. в интервале* (t_0, t_1) *есть сопряженные точки, то нижняя грань в задаче равна* $-\infty$. *Если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.*

6.2.2. Пример.

1. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \inf;\ \int_0^{T_0} x\,dt = 0,\ x(0) = x(T_0) = 0.$

2. Необходимое условие — правило множителей Лагранжа: $\ddot{x} + x - \lambda = 0$.

3. Общее решение уравнения п. 2 с условием $x(0)=0$ есть $x(t)=A\sin t+B(\cos t-1)$. Среди допустимых экстремалей всегда имеется допустимая экстремаль $\widehat{x}(t)\equiv 0$.

4. Применяем достаточные условия п. 6.2.1 (теорема 2). Условие Лежандра выполнено: $A_0=2>0$. Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби здесь совпадает с уравнением Эйлера. Решение h_0 однородного уравнения с условиями $h_0(0)=0$, $\dot h_0(0)=1$ есть $\sin t$. Решение h_1 неоднородного уравнения $\ddot x+x+1=0$ с условиями $h_1(0)=\dot h_1(0)=0$ есть $\cos t-1$. Матрица $H(t)$ имеет вид

$$H(t)=\begin{bmatrix} h_0(t) & h_1(t) \\ \int\limits_0^t h_0 d\tau & \int\limits_0^t h_1 d\tau \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin t & \cos t-1 \\ 1-\cos t & \sin t-t \end{bmatrix}.$$

Таким образом, сопряженные точки — это решения уравнения

$$\det H(t)=2-2\cos t-t\sin t=0 \Leftrightarrow \sin t/2=0,\ t/2=\operatorname{tg} t/2.$$

Ближайшая к нулю сопряженная точка: $t_1=2\pi$.

Ответ. Из теоремы 2 п. 6.2.1 следует, что при $T_0<2\pi$ $\widehat{x}(\cdot)\equiv 0$ — единственная допустимая экстремаль, доставляющая абсолютный минимум, $S_{\min}=0$; при $T_0>2\pi$ $S_{\min}=-\infty$. Можно показать, что при $T_0=2\pi$ допустимые экстремали имеют вид $\widehat{x}(t)=C\sin t$ и они доставляют абсолютный минимум, $S_{\min}=0$.

Примечание. Рассмотренную задачу заменой $\dot y=x$, $y(0)=0$ можно свести к задаче со старшими производными:

$$\int\limits_0^{T_0}\left(\ddot y^2-\dot y^2\right)dt\to\inf;\quad y(0)=\dot y(0)=y(T_0)=\dot y(T_0)=0,$$

а ее можно исследовать методами п. 7.2.2.

Задачи

Решить изопериметрические задачи 6.1—6.17.

6.1. $\int\limits_0^1 \dot x^2\,dt\to\operatorname{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt=0,\ x(0)=1,\ x(1)=0.$

6.2. $\int\limits_0^1 \dot x^2\,dt\to\operatorname{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt=3,\ x(0)=1,\ x(1)=6.$

6.3. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 tx\,dt = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

6.4. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 tx\,dt = 0$, $x(0) = -4$, $x(1) = 4$.

6.5. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 x\,dt = 1$, $\int_0^1 tx\,dt = 0$,

$x(0) = x(1) = 0$.

6.6. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 x\,dt = -\frac{3}{2}$, $\int_0^1 tx\,dt = -2$,

$x(0) = 2$, $x(1) = -14$.

6.7. $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}$,

$x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$.

6.8. $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^\pi x\sin t\,dt = 0$,

$x(0) = 0$, $x(\pi) = 1$.

6.9. $\int_0^\pi x\sin t\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt = \frac{3\pi}{2}$,

$x(0) = 0$, $x(\pi) = \pi$.

6.10. $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}$;

$\int_0^\pi x\sin t\,dt = \pi + 2$, $x(0) = 2$, $x(\pi) = 0$.

6.11 $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 xe^{-t}\,dt = e$,

$x(1) = 2$, $x(0) = 2e + 1$.

6.12. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 xe^{t}\,dt = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

6.13. (P) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}; \int\limits_0^1 x e^t\,dt = \frac{e^2+1}{4}$,

$x(0) = 0,\ x(1) = e.$

6.14. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}; \int\limits_0^1 x e^{-t}\,dt = \frac{1-3e^{-2}}{4}$,

$x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{e}.$

6.15. (P) $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \int\limits_1^2 tx\,dt = \frac{7}{3}$,

$x(1) = 1,\ x(2) = 2.$

6.16. $\int\limits_1^2 t^3\dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \int\limits_1^2 x\,dt = 2,\ x(1) = 4,\ x(2) = 1.$

6.17. (P) $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

В задачах 6.18 — 6.25 найти допустимые экстремали.

6.18. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \int\limits_0^\pi x\cos t\,dt = 1$,

$x(0) = x(\pi) = 0.$

6.19. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) \to \mathrm{extr}; \int\limits_0^{\pi/2} x\sin t\,dt - 1$,

$x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

6.20. (P) $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\,dt \to \mathrm{extr}; \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l$,

$x(-T_0) = x(T_0) = 0$ (задача Дидоны).

6.21. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr}; \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l$,

$x(-T_0) = x(T_0) = 0,$

6.22. $\int_0^1 \dot x_1 \dot x_2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 x_1\,dt = 1$, $x_1(0) = x_1(1) = 0$;

$\int_0^1 x_2\,dt = 0$, $x_2(\theta) = 0$, $x_2(1) = 1$.

6.23. $\int_0^1 \dot x_1 \dot x_2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 t x_1\,dt = \int_0^1 t x_2\,dt = 0$,

$x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

6.24. $\int_0^1 (x_1 + x_2)\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 \dot x_1 \dot x_2\,dt = 0$,

$x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -3$.

6.25. $\int_0^1 t(x_1 - x_2)\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 \dot x_1 \dot x_2\,dt = -\frac{4}{5}$,

$x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$.

§ 7. ЗАДАЧИ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

7.1. Необходимое условие первого порядка.

7.1.1. Постановка задачи. *Задачей со старшими производными* (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве $C^n([t_0, t_1])$:

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot x(t), \ldots, x^{(n)}(t))\,dt \to \mathrm{extr}; \qquad (з)$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_j^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1. \qquad (1)$$

Здесь $L\colon \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$ — функция $n+2$ переменных. Функция L называется *интегрантом*. Функции $x(\cdot) \in C^n([t_0, t_1])$, удовлетворяющие условиям (1) на концах отрезка $[t_0, t_1]$, называются *допустимыми*.

Будем говорить, что допустимая функция $\hat x(\cdot)$ доставляет в (з) *слабый локальный минимум* (*максимум*) в пространстве $C^n([t_0, t_1])$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\cdot)$, для которой $\|x(\cdot) - \hat x(\cdot)\|_{C^n([t_0,t_1])} < \delta$, выполняется неравенство

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat x(\cdot)) \quad (\mathcal{J}(x(\cdot)) \leqslant \mathcal{J}(\hat x(\cdot))),$$

и будем писать при этом $\hat x(\cdot) \in \mathrm{loc\,min}\,з$ ($\mathrm{loc\,max}\,з$).

7.1.2. Правило решения.

1. Формализовать задачу, т. е. привести ее к виду (з) п. 7.1.1.

2. Выписать необходимое условие — *уравнение Эйлера — Пуассона*:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \widehat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0.$$

3. Найти допустимые экстремали, т. е. решения уравнения Эйлера — Пуассона с заданными краевыми условиями.

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

7.1.3. Уравнение Эйлера — Пуассона.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^{n+2})$, L: $\mathcal{U} \to \mathbf{R}$ — *интегрант, являющийся непрерывной функцией вместе со своими производными по* $x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}$ (*условие гладкости*), $(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \ldots, \widehat{x}^{(n)}(t)) \in \mathcal{U}$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. *Тогда, если функция* $\widehat{x}(\cdot)$ *доставляет локальный экстремум в задаче со старшими производными* (з) *в пространстве* $C^n([t_0\ t_1])$, *то выполнено следующее уравнение*:

$$-\frac{d}{dt}\left(\ldots\left(-\frac{d}{dt}\left(-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{x^{(n)}}(t) + \widehat{L}_{x^{(n-1)}}(t)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \widehat{L}_{x^{(n-2)}}(t)\right)\ldots\right) + \widehat{L}_x(t) = 0.$$

Если допустить, что $\widehat{L}_{x^{(k)}}(\cdot) \in C^k([t_0, t_1])$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то получим уравнение Эйлера — Пуассона.

◁ А) Определение вариации по Лагранжу. Дифференцируя под знаком интеграла так же, как мы это делали в пп. 5.1.3, 5.2.3, 6.1.3, приходим к следующей формуле:

$$\delta\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} \widehat{L}_{x^{(k)}}(t)\, x^{(k)}(t)\right) dt.$$

Б) Усиленная лемма Дюбуа — Реймона. *Пусть* $a_k(\cdot) \in C([t_0, t_1])$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *и для любой функции* $x(\cdot) \in C^n([t_0, t_1])$, $x^{(j)}(t_i) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 0, 1$, *выполняется равенство*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, x^{(k)}(t)\right) dt = 0. \tag{1}$$

Тогда на отрезке $[t_0, t_1]$ непрерывно дифференцируемы функции

$$a_n(\cdot), -\frac{d}{dt}a_n(\cdot)+a_{n-1}(\cdot),$$
$$-\frac{d}{dt}\left(-\frac{d}{dt}a_n(\cdot)+a_{n-1}(\cdot)\right)+a_{n-2}, \ldots$$

и выполняется равенство

$$-\frac{d}{dt}\left(\ldots\left(-\frac{d}{dt}\left(-\frac{d}{dt}a_n(t)+a_{n-1}(t)\right)+a_{n-2}(t)\right)\ldots\right)+a_0(t)=0.$$

◁◁ Рассмотрим следующую систему из n линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\dot{p}_0+a_0&=0,\\ -\dot{p}_1-p_0+a_1&=0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ -\dot{p}_{n-1}-p_{n-2}+a_{n-1}&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) легко решается с помощью последовательного интегрирования уравнений, начиная с первого. При этом функция $p_{n-1}(\cdot)$ определена с точностью до многочлена степени $n-1$. Подберем этот многочлен таким образом, чтобы для функции $p_{n-1}(\cdot)$ выполнялись соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-\tau)^k(p_{n-1}(\tau)-a_n(\tau))\,d\tau=0,\ k=0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $y(\cdot)$, определяемую по формуле

$$y(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-1}(p_{n-1}(\tau)-a_n(\tau)\ d\tau.$$

Из определения функции $y(\cdot)$ вытекает, что $y^{(n)}(\cdot)=p_{n-1}(\cdot)-a_n(\cdot)$ и $y^{(k)}(t_0)=0$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. В силу условий (3) $y^{(k)}(t_1)=0$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, т. е. $y(\cdot)\in C_0^n([t_0, t_1])$. Следовательно, для $y(\cdot)$ выполняется соотношение (1). Таким образом,

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k(t)\,y^{(k)}(t)\right)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k(t)\,y^{(k)}(t)+(p_{n-1}(t)-y^{(n)}(t))\,y^{(n)}(t)\right)dt.$$

Заменяя в последнем интеграле $a_k(\cdot)$ на их выражения из системы (2), получим

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\dot{p}_k(t)\,y^{(k)}(t)+\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t)\,y^{(k+1)}(t)-\left(y^{(n)}(t)\right)^2\right)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t)\,y^{(k)}(t)\right)^{\boldsymbol{\cdot}}dt-\int_{t_0}^{t_1}\left(y^{(n)}(t)\right)^2dt.$$

Учитывая, что $y^{(k)}(t_i)=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ i=0,\ 1,$ из последнего соотношения следует, что $\int_{t_0}^{t_1}\left(y^{(n)}(t)\right)^2dt=0.$ Поэтому $y^{(n)}(t)=0$ и, значит, $p_{n-1}(t)=a_n(t)$. Из последнего уравнения системы (2) вытекает, что $a_n(\cdot)\in C^1([t_0,\ t_1])$. Аналогично, из (2) следует непрерывная дифференцируемость остальных, указанных в лемме функций и справедливость дифференциального уравнения. ▷▷

Очевидно, что лемма Дюбуа — Реймона из п. 5.1.3 является частным случаем усиленной леммы Дюбуа — Реймона.

В) З а в е р ш е н и е д о к а з а т е л ь с т в а. Мы предположили, что $\hat{x}(\cdot)\in\operatorname{loc\,extr}$ з. Тогда из определения локального экстремума следует, что функция $\varphi(\lambda)=\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)+\lambda x(\cdot))$ имеет локальный экстремум в нуле и, значит, $\varphi'(0)\overset{\text{def}}{=}\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot),x(\cdot))=0$. В силу произвольности $x(\cdot)\in C_0^n([t_0,t_1])$ получаем, что

$$\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot),x(\cdot))=0\quad\forall x(\cdot)\in C_0^n([t_0,t_1]).$$

Теперь, если сопоставить вид первой вариации $\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot),x(\cdot))$, выписанный в п. А), с усиленной леммой Дюбуа — Реймона, то получится утверждение теоремы. ▷

7.1.4. Пример.

$$\int_0^1\ddot{x}^2\,dt\to\operatorname{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=x(1)=0,\ \dot{x}(1)=1.$$

Р е ш е н и е. 1. Интегрант: $L=\ddot{x}^2$.

2. Необходимое условие — уравнение Эйлера — Пуассона

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{L}_{\ddot{x}}(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0\Leftrightarrow x^{(4)}(t)=0.$$

3. Общее решение уравнения Эйлера — Пуассона: $x(t)=C_1t^3+C_2t^2+C_3t+C_4$. Неизвестные константы C_1, C_2,

C_3, C_4 определяются из краевых условий

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \Rightarrow C_4=0, \\ \dot{x}(0)=0 \Rightarrow C_3=0, \\ x(1)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0, \\ \dot{x}(1)=1 \Rightarrow 3C_1+2C_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1=1, \\ C_2=-1. \end{array}$$

Значит, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x}=t^3-t^2$.

4. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(\cdot) \in C_0^2([0,1])$, то

$$\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)+h(\cdot))=\int_0^1(\ddot{\widehat{x}}+\ddot{h})^2\,dt=\int_0^1\ddot{\widehat{x}}^2\,dt+2\int_0^1\ddot{\widehat{x}}\ddot{h}\,dt+\int_0^1\ddot{h}^2dt.$$

С помощью двукратного интегрирования по частям, учитывая, что $h(0)=h(1)=\dot{h}(0)=\dot{h}(1)=0$, получаем

$$\int_0^1\ddot{\widehat{x}}\ddot{h}\,dt=\int_0^1\ddot{\widehat{x}}\,d\dot{h}=\ddot{\widehat{x}}\dot{h}\Big|_0^1-\int_0^1\dddot{\widehat{x}}\dot{h}\,dt=$$

$$=-\int_0^1\dddot{\widehat{x}}\,dh=-\dddot{\widehat{x}}h\Big|_0^1+\int_0^1\widehat{x}^{(4)}h\,dt=0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)+h(\cdot))=\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot))+\int_0^1\ddot{h}^2\,dt\geqslant\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)),$$

$$S_{\min}=\int_0^1\ddot{\widehat{x}}^2\,dt=\int_0^1(6t-2)^2\,dt=4.$$

Ответ. Функция $\widehat{x}=t^3-t^2$ доставляет в задаче абсолютный минимум, $S_{\min}=4$, $S_{\max}=+\infty$.

7.2. Необходимые условия высших порядков и достаточные условия.

7.2.1. Теория. Рассмотрим задачу со старшими производными:

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L\left(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n)}\right)dt\to\inf;$$

$$x^{(k)}(t_j)=x_j^k,\ k=0,1,\ldots,n,\ j=0,1, \tag{з}$$

где $L\colon \mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{U}\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^{n+2})$.

Будем далее предполагать, что интегрант L по меньшей мере принадлежит классу $C^{2n}(\mathcal{U})$. Пусть $\widehat{x}(\cdot)\in C^{2n}([t_0, t_1])$ — экстремаль (з), т. е. на ней выполнено уравнение Эйлера — Пуассона.

Говорят, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено *условие Лежандра* (*усиленное условие Лежандра*), если

$$\widehat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)\geqslant 0 \;\left(\widehat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)>0\right)\;\forall t\in[t_0, t_1].$$

При наших допущениях относительно гладкости интегранта L функционал $\mathcal{J}$ имеет вторую производную в точке $\widehat{x}(\cdot)$:

$$\mathcal{J}''(\widehat{x}(\cdot))[x(\cdot), x(\cdot)]=\mathcal{K}(x(\cdot)),$$

где

$$\mathcal{K}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i,j=0}^{n}A_{ij}x^{(i)}x^{(j)}\,dt,\quad A_{ij}(t)=\widehat{L}_{x^{(i)}x^{(j)}}(t). \qquad (1)$$

Уравнение Эйлера — Пуассона для функционала $\mathcal{K}$ называется *уравнением Якоби* для (з) на экстремали $\widehat{x}(\cdot)$.

Для квадратичного функционала, имеющего «диагональную» форму

$$\mathcal{K}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=0}^{n}A_k(t)\left(x^{(k)}(t)\right)^2dt, \qquad (1')$$

уравнение Якоби приобретает вид

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left(A_kx^{(k)}\right)=0.$$

Пусть на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется *сопряженной к точке* t_0, если существует нетривиальное решение h уравнения Якоби, для которого $h^{(i)}(t_0)=h^{(i)}(\tau)=0$, $i=0, 1, \ldots, n-1$. Говорят, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено *условие Якоби* (*усиленное условие Якоби*), если в интервале (t_0, t_1) (полуинтервале $(t_0, t_1]$) нет точек, сопряженных с t_0.

Уравнение Якоби — это линейное уравнение $2n$-го порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно старшей производной. Пусть $h_1(\cdot), \ldots, h_n(\cdot)$ — решение уравнения Якоби, для которых

$H(t_0)=0$, а $H^{(n)}(t_0)$ — невырожденная матрица, где

$$H(t)=\begin{bmatrix} h_1(t) \ldots h_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_1^{(n-1)}(t) \ldots h_n^{(n-1)}(t)\end{bmatrix},$$

$$H^{(n)}(t)=\begin{bmatrix} h_1^{(n)}(t) \ldots h_n^{(n)}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_1^{(2n-1)}(t) \ldots h_n^{(2n-1)}(t)\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что точка τ является сопряженной к t_0 тогда и только тогда, когда матрица $H(\tau)$ является вырожденной. Это дает аналитическое средство нахождения сопряженных точек.

Пусть $\mathcal{U}=V\times\mathbf{R}$, где $V\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^{n+1})$. Мы назовем интегрант L: $V\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *квазирегулярным* на V, если функция $x^{(n)}\to L(t, x, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)})$ выпукла $\forall\left(t, x, \ldots, x^{(n-1)}\right)\in V$.

Наконец, мы скажем, что $\hat{x}(\cdot)\in KC^n([t_0, t_1])$ доставляет *сильный минимум* в (з), если найдется $\varepsilon>0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\cdot)\in KC^n([t_0, t_1])$ такой, что $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{C^{n-1}([t_0,t_1])}<\varepsilon$, выполнено неравенство $\mathcal{J}(x(\cdot))\geqslant\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$.

Теорема 1. Необходимые условия слабого минимума. *Пусть в задаче* (з) *интегрант* L *удовлетворяет условию гладкости* $L\in C^{n+2}(\mathcal{U})$. *Если* $\hat{x}(\cdot)\in C^{2n}([t_0, t_1])$ *и доставляет слабый минимум в* (з), *то функция* $\hat{x}(\cdot)$ *должна быть экстремалью, на которой выполнены условия Лежандра и Якоби.*

Достаточные условия сильного минимума. *Пусть* $\mathcal{U}=V\times\mathbf{R}$, $V\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^{n+1})$ *и в дополнение к условию гладкости интегрант* L *квазирегулярен на* V. *Тогда, если* $\hat{x}(\cdot)\in C^{2n}([t_0, t_1])$ *и при этом* $\hat{x}(\cdot)$ — *допустимая экстремаль, на которой выполнены усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби, то* $\hat{x}(\cdot)$ *доставляет сильный минимум в задаче* (з).

Теорема 2. *Пусть в* (з) *функционал имеет вид* (1′), $A_k(\cdot)\in C^k([t_0, t_1])$ *и выполнено усиленное условие Лежандра* $(A_n(t)>0\ \forall t\in[t_0, t_1])$. *Тогда, если не выполнено условие Якоби, т. е. в интервале* (t_0,t_1) *есть сопряженная точка, то нижняя грань в задаче равна* $-\infty$. *Если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.*

Теоремы 1, 2 будут доказаны в § 10. Там же будет выведено необходимое условие Вейерштрасса для сильного минимума.

7.2.2. Пример.

1. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr}; \ x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0.$

2. Необходимое условие — уравнение Эйлера — Пуассона $\ddddot{x} + \ddot{x} = 0$.

3. Общее решение уравнения Эйлера — Пуассона: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 t + C_4$. Среди допустимых экстремалей всегда имеется допустимая экстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$.

4. Применяем достаточные условия п. 7.2.1 (теорема 2). Усиленное условие Лежандра выполнено: $\hat{L}_{\ddot{x}\ddot{x}}(t) = 2 > 0$. Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби здесь совпадает с уравнением Эйлера — Пуассона. Положим

$$h_1(t) = 1 - \cos t, \quad h_2(t) = \sin t - t,$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ \dot{h}_1(t) & \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos t & \sin t - t \\ \sin t & \cos t - 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $H(0) = 0$,

$$\det \ddot{H}(0) = \begin{bmatrix} \ddot{h}_1(0) & \ddot{h}_2(0) \\ \dddot{h}_1(0) & \dddot{h}_2(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, сопряженные точки — это решения уравнения

$$\det H(t) = 2(\cos t - 1) + t \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{t}{2} = 0, \ \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Ближайшая к нулю сопряженная точка: $t_1 = 2\pi$.

Ответ. Из теоремы 2 п. 7.2.1 следует, что при $T_0 < 2\pi$ $\hat{x}(\cdot) \equiv 0$ — единственная допустимая экстремаль, доставляющая абсолютный минимум, $S_{\min} = 0$; при $T_0 > 2\pi$ $S_{\min} = -\infty$. Можно показать, что при $T_0 = 2\pi$ допустимые экстремали имеют вид $\hat{x}(t) = C(1 - \cos t)$ и все они доставляют абсолютный минимум, $S_{\max} = +\infty$.

Задачи

Решить задачи со старшими производными 7.1—7.27.

7.1. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0$, $x(1) = 1$.

7.2. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $x(1) = \dot{x}(1) = x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

7.3. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(1) = \dot{x}(1) = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -4$.

7.4. $\int\limits_0^1 (48x - \ddot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 4$.

7.5. $\int\limits_0^1 (24tx - \ddot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = \frac{1}{10}$.

7.6. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 24tx)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(1) = \frac{1}{5}$, $\dot{x}(1) = 1$.

7.7. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(\pi) = \operatorname{sh}\pi$, $\dot{x}(\pi) = \operatorname{ch}\pi$.

7.8. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(\pi) = \operatorname{ch}\pi + 1$, $\dot{x}(\pi) = \operatorname{sh}\pi$.

7.9. (P) $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$;

$x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0$.

7.10. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \;\; x(\pi) = \operatorname{sh}\pi, \;\; \dot{x}(\pi) = \operatorname{ch}\pi + 1.$$

7.11. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \;\; x(T_0) = \xi_0, \;\; \dot{x}(T_0) = \xi_1.$$

7.12. $\int\limits_0^{1} (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = -1, \;\; \dot{x}(0) = 0, \;\; \dot{x}(\pi) = \operatorname{sh}\pi, \;\; x(\pi) = \operatorname{ch}\pi.$$

7.13. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(\pi) = 0, \;\; \dot{x}(\pi) = \operatorname{sh}\pi.$$

7.14. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 1, \;\; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \;\; \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

7.15. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0, \;\; x(\pi) = 1.$$

7.16. $\int\limits_0^{1} (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = 0, \;\; x(1) = \operatorname{ch}1, \;\; \dot{x}(1) = \operatorname{sh}1.$$

7.17. $\int\limits_0^{1} (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = 0, \;\; \dot{x}(0) = 1, \;\; x(1) = \operatorname{sh}1, \;\; \dot{x}(1) = \operatorname{ch}1.$$

7.18. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0.$$

7.19. $\int_0^1 e^{-t}\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ x(1)=e,\ \dot{x}(1)=2e.$

7.20. $\int_0^1 e^{-t}\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=1,\ x(1)=\dot{x}(1)=e.$

7.21. $\int_0^1 (t+1)\,\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};$

$x(0)=\dot{x}(0)=0,\ x(1)=1,\ \dot{x}(1)=2.$

7.22. $\int_0^1 (t+1)^2\,\ddot{x}^2 \to \text{extr};$

$x(0)=0,\ x(1)=\ln 2,\ \dot{x}(0)=1,\ \dot{x}(1)=\frac{1}{2}.$

7.23. $\int_1^e (t+1)\,t\,\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};$

$x(1)=0,\ \dot{x}(1)=1,\ x(e)=e,\ \dot{x}(e)=2.$

7.24. $\int_0^1 (t+1)^3\,\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$x(0)=1,\ x(1)=\frac{1}{2},\ \dot{x}(0)=-1,\ \dot{x}(1)=-\frac{1}{4}.$

7.25. $\int_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0,$

$x(1)=1,\ \dot{x}(1)=3,\ \ddot{x}(1)=6.$

7.26. $\int_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0,$

$x(1)=1,\ \dot{x}(1)=4,\ \ddot{x}(1)=12.$

7.27. $\int_0^1 (\dddot{x}^2+\ddot{x}^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=\ddot{x}(0)=0,$

$\dot{x}(0)=1,\ \dot{x}(1)=\operatorname{ch} 1,\ x(1)=\ddot{x}(1)=\operatorname{sh} 1.$

В задачах 7.28—7.30 найти допустимые экстремали.

7.28. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ddot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

7.29. $\int\limits_0^{\pi} (\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \ddot{x}(\pi) = 0, \quad x(\pi) = \pi, \quad \dot{x}(\pi) = 2.$$

7.30. $\int\limits_0^{\pi} (\dddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0,$

$$x(\pi) = \ddot{x}(\pi) = \operatorname{sh} \pi, \quad \dot{x}(\pi) = \operatorname{ch} \pi + 1.$$

Глава III

ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

§ 8. ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА

8.1. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа.

8.1.1 Постановка задачи. *Задачей Лагранжа* называется следующая экстремальная задача в пространстве $\Xi = C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times C(\Delta, \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2$:

$$\mathscr{B}_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \to \inf; \qquad (з)$$

$$\Phi(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0, \qquad (1)$$

$$\mathscr{B}_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m', \qquad (2)$$

$$\mathscr{B}_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = 0, \quad i = m'+1, \ldots, m, \qquad (3)$$

где

$$\mathscr{B}_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u)\, dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$i = 0, 1, \ldots, m.$$

Здесь Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, f_i: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ — функции $n+r+1$ переменных, ψ_i: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — функции $2n+2$ переменных, φ: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$ — вектор-функция $n+r+1$ переменных.

Ограничение (1) называется *дифференциальной связью*, вектор-функция $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ — *фазовой переменной*, вектор-функция $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_r(\cdot))$ — *управлением*.

Четверка $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ называется *управляемым процессом* в задаче Лагранжа, если $x(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $u(\cdot) \in C(\Delta, \mathbf{R}^r)$, $t_0, t_1 \in \operatorname{int}\Delta$, $t_0 < t_1$, и всюду па отрезке $[t_0, t_1]$ выполняется дифференциальная связь (1), и *допустимым управляемым процессом*, если эта четверка является управляемым процессом и, кроме того, выполнены ограничения (2), (3).

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется *оптимальным* (*в слабом смысле*) *процессом*, или слабым минимумом в задаче (з), если существует такое $\delta > 0$, что для любого допустимого управляемого процесса $\xi = (x(\ ),\ u(\ ),\ t_0,\ t_1)$, удовлетворяющего условию $\|\xi - \widehat{\xi}\|_{\Xi} < \delta$, выполнено неравенство $\mathscr{B}(\xi) \geqslant \mathscr{B}(\widehat{\xi})$.

8.1.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1; p(\cdot), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + \right.$$

$$\left. + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u)) \right) dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$\lambda = (\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m), \quad p(\ ) \in C^1([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^{n*}).$$

2. Выписать необходимые условия оптимального в слабом смысле процесса $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot),\ \widehat{u}(\ ),\ \widehat{t}_0,\ \widehat{t}_1)$:

а) стационарности по x — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{p}(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{ix}(t) - p(t)\widehat{\varphi}_x(t) \quad \forall t \in [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u));$$

б) трансверсальности по x:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{t}_k) = (-1)^k \widehat{l}_{x(t_k)} \Leftrightarrow p(\widehat{t}_k) =$$

$$= (-1)^k \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{\psi}_{ix(t_k)}, \quad k = 0, 1,$$

для терминанта

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$$

в) стационарности по u:

$$\widehat{L}_u(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{iu}(t) - p(t)\widehat{\varphi}_u(t) = 0 \quad \forall t \in [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1];$$

г) стационарности по t_k:

$$\widehat{\mathscr{L}}_{t_k} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_i(\widehat{t}_k) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left(\widehat{\psi}_{i t_k} + \widehat{\psi}_{i x(t_k)} \dot{\widehat{x}}(\widehat{t}_k) \right) = 0, \quad k = 0, 1$$

(условие стационарности по t_k выписывается только для подвижных концов);

д) дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i \mathscr{B}_i(\widehat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

е) неотрицательности:

$$\lambda_i \geqslant 0, \; i = 0, 1, \ldots, m'.$$

3. Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполняются условия п. 2 с множителями Лагранжа λ и $p(\cdot)$, одновременно не равными нулю. При этом бывает полезно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Среди всех найденных в п. 3 допустимых экстремальных процессов отыскать решение или доказать, что решения нет.

Предлагаем проверить, что правило решения составлено в полном соответствии с общим принципом Лагранжа, о котором говорилось во введении.

Набор условий для нахождения оптимального процесса является полным Действительно, для определения неизвестных функций $x(\ )$, $p(\ )$, $u(\ )$ мы имеем систему из дифференциальных уравнений (1) п. 8.1.1 и условий б), в). Выражая из последнего (разумеется, когда это можно сделать, например, если выполнены условия теоремы о неявной функции) $u(\ )$ через $x(\ )$ и $p(\cdot)$, мы получаем систему из $2n$ скалярных дифференциальных уравнений. Ее общее решение зависит от $2n$ произвольных постоянных и еще от множителей Лагранжа λ_i, среди которых m независимых. Добавляя сюда еще t_0 и t_1, получаем всего $2n + m + 2$ неизвестных. Для их определения мы имеем $2n$ условий трансверсальности б), m условий дополняющей нежесткости и заданных ограничений (3) п. 8.1.1 и два условия стационарности по t_k. Таким образом, число неизвестных совпадает с числом уравнений. (Разумеется, разрешимости полученной системы уравнений указанное обстоятельство не гарантирует.)

8.1.3. Необходимые условия экстремума.

Теорема Эйлера — Лагранжа. *Пусть* $\widehat{\xi}=(\widehat{x}(\ ), \widehat{u}(\ ), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ — *оптимальный (в слабом смысле) процесс в задаче Лагранжа и при этом функции* f_i, $i=0, 1, \ldots, m$, φ *и их частные производные по* x *и* u *непрерывны в некоторой окрестности множества* $\{(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) \mid t\in[\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]\}$, *а* ψ_i, $i=0, 1, \ldots, m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\widehat{t}_0, \widehat{x}(\widehat{t}_0), \widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1))$ (*условие гладкости*).

Тогда найдутся множители Лагранжа $\lambda=(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ *и* $p(\cdot)\in C^1([\widehat{t}_0, \widehat{t}_1], \mathbf{R}^{n*})$, *не равные одновременно нулю и такие, что для функции Лагранжа* $\mathscr{L}$ (*п.* 8.1.2) *выполнены условия*:

а) *стационарности по* x:

$$\dot{p}(t)+p(t)\widehat{\varphi}_x(t)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\widehat{f}_{ix}(t);$$

б) *трансверсальности по* x:

$$p(\widehat{t}_0)=\widehat{l}_{x(t_0)},\quad p(\widehat{t}_1)=-\widehat{l}_{x(t_1)};$$

в) *стационарности по* u:

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\widehat{f}_{iu}(t)-p(t)\widehat{\varphi}_u(t)=0;$$

г) *стационарности по* t_k:

$$\widehat{\mathscr{L}}_{t_k}=0,\quad k=0, 1;$$

д) *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_i\mathscr{B}_i(\widehat{\xi})=0,\quad i=1, \ldots, m';$$

е) *неотрицательности*:

$$\lambda_i\geqslant 0,\ i=0, 1, \ldots, m'.$$

◁ Рассмотрим следующую задачу с ограничениями типа равенств и неравенств в пространстве Ξ:

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}_0(\xi)\to\inf;\quad \Phi(\xi)=0,\\ &\mathscr{B}_i(\xi)\leqslant 0,\quad i=1, \ldots, m',\\ &\mathscr{B}_i(\xi)=0,\quad i=m'+1, \ldots, m.\end{aligned}\qquad (\widetilde{з})$$

Отображение Φ при этом действует в пространство $Y=C(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Тогда $\widehat{\xi}$ доставляет локальный минимум в задаче $(\widetilde{з})$.

Покажем, что для задачи $(\widetilde{з})$ выполняется принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств, и выпишем согласно теореме п. 2.3.3 необходимые условия экстремума.

Действительно, банаховость пространств Ξ и Y вытекает из утверждения о банаховости произведения банаховых пространств (п. 1.1.3). Гладкость отображений $\mathscr{B}_i$ и Φ доказана в АТФ (§ 2.4). Там же получены формулы для производных:

$$\mathscr{B}_i'(\hat{\xi})[\eta] = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{f}_{ix}h + \hat{f}_{iu}v)\,dt + \hat{f}_i(\hat{t}_1)\tau_1 - \hat{f}_i(\hat{t}_0)\tau_0 +$$

$$+ \hat{\psi}_{it_0}\tau_0 + \hat{\psi}_{it_1}\tau_1 + \hat{\psi}_{ix(t_0)}h(\tau_0) + \hat{\psi}_{ix(t_1)}h(\tau_1) +$$

$$+ \hat{\psi}_{ix(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\tau_0 + \hat{\psi}_{ix(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)\tau_1, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

$$\Phi'(\hat{\xi})[\eta] = \dot{h}(t) - \hat{\varphi}_x(t)\,h(t) - \hat{\varphi}_u(t)\,v(t),$$

где $\eta = (h(\cdot),\ v(\ ),\ \tau_0,\ \tau_1) \in \Xi$.

Замкнутость образа отображения $\Phi'(\hat{\xi})$ имеет место в силу того, что образ $\Phi'(\hat{\xi})\Xi$ просто совпадает с Y. Действительно, взяв произвольное $y(\cdot) \in Y = C(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$, положим $v(\cdot) \equiv 0$, $\tau_0 = \tau_1 = 0$. Уравнение

$$\Phi'(\hat{\xi})[h(\ ),\ 0,\ 0,\ 0] = y(\cdot)$$

эквивалентно системе n линейных дифференциальных уравнений $\dot{h}(t) - \hat{\varphi}_x(t)h = y(t)$ с непрерывными коэффициентами. Оно имеет решение $h(\cdot) \in C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$ в силу теоремы существования для линейных систем.

Таким образом, все условия теоремы п. 2.3.3 выполняются. Согласно этой теореме найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, $y^* \in Y^*$, одновременно не равные нулю и такие, что для функции Лагранжа

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\xi;\, y^*, \lambda) = \widetilde{\mathscr{L}}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1;\, y^*, \lambda) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) \right) dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) + y^* \circ \Phi$$

выполняются условия стационарности

$$\hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_\xi' = 0 \Leftrightarrow \hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_x = 0, \quad \hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_u = 0, \quad \hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_{t_k} = 0, \quad k = 0, 1,$$

дополняющей нежесткости и неотрицательности.

Для доказательства теоремы покажем, что равенство $\hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_x = 0$ эквивалентно а) и б); условие $\hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_u = 0$ эквивалентно в), а из соотношения $\hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_{t_k} = 0$ следует г).

Расшифруем условие стационарности $\widetilde{\mathscr{L}}$ по x. Имеем

$$0 = \hat{\widetilde{\mathscr{L}}}_x [h(\cdot)] =$$

$$= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} q(t)\, h(t)\, dt + \hat{l}_{x(t_0)} h(\hat{t}_0) + \hat{l}_{x(t_1)} h(\hat{t}_1) + \langle y^*, \dot{h} - \hat{\varphi}_x h \rangle,$$

где $\quad q(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{ix}(t).$

Определим функцию $p(\cdot)$ из условий

$$\dot{p}(t) = -p(t)\, \hat{\varphi}_x(t) + q(t), \quad p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}. \qquad (1)$$

В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейной неоднородной системы (АТФ, с. 191) $p(\cdot)$ определяется нашими условиями однозначно. С другой стороны, для любых $\alpha \in \mathbf{R}^n$ и $y(\cdot) \in C([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbf{R}^n)$ можно однозначно определить функцию h по условиям

$$\dot{h}(t) = \hat{\varphi}_x(t) h(t) + y(t), \; h(\hat{t}_0) = \alpha. \qquad (2)$$

Но тогда в силу (1), (2) имеем

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (p(t)\, h(t))^{\cdot}\, dt = p(\hat{t}_1)\, h(\hat{t}_1) - p(\hat{t}_0)\, h(\hat{t}_0) =$$

$$= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\dot{p}(t)\, h(t) + p(t)\, \dot{h}(t))\, dt =$$

$$= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (-p(t) \hat{\varphi}_x(t)\, h(t) + q(t)\, h(t) + p(t)\, \hat{\varphi}_x(t)\, h(t) +$$

$$+ p(t)\, y(t))\, dt = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (q(t)\, h(t) + p(t)\, y(t))\, dt.$$

Выражая из последнего соотношения $\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} q(t)\, h(t)\, dt$ и подставляя полученное выражение в условие стационарности по x, получим тождество по $\alpha \in \mathbf{R}^n$ и $y(\cdot) \in C([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbf{R}^n)$:

$$0 \equiv -\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} p(t)\, y(t)\, dt + \langle y^*, y(\cdot)\rangle + \left(\hat{l}_{x(t_0)} - p\left(\hat{t}_0\right)\right)\alpha.$$

Отсюда следует, что $\langle y^*, y(\cdot)\rangle = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} p(t)\, y(t)\, dt$, $\hat{l}_{x(t_0)} = p\left(\hat{t}_0\right)$. Таким образом, $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L}$ и, значит, условие г) выполняется.

Расшифруем теперь условие стационарности по u, учитывая вид y^*:

$$0 = \hat{\mathscr{L}}_u[v(\cdot)] = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{iu}(t) - p(t)\, \hat{\varphi}_u(t)\right) v(t)\, dt$$

$$\forall v(\cdot) \in C\left([t_0, t_1], \mathbf{R}^r\right).$$

Отсюда по лемме Дюбуа — Реймона (п. 5.1.3) вытекает справедливость условия в). $\triangleright$

8.1.4. Пример.

$$\int_0^{\pi/2} u^2\, dt \to \operatorname{extr}; \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Решение. 1. Приведем задачу к виду задачи Лагранжа п. 8.1.1, сделав замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\int_0^{\pi/2} u^2\, dt \to \operatorname{extr};$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - x_1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^{\pi/2} \left(\lambda_0 u^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 + x_1 - u)\right) dt +$$
$$+ \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_1\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 u^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 + x_1 - u)$:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i} + \widehat{L}_{x_i} = 0, \ i = 1, 2 \Leftrightarrow -\dot{p}_1 + p_2 = 0, \ -\dot{p}_2 - p_1 = 0;$$

б) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_3(\pi/2)$:

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_2(0) = \lambda_2, \quad p_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_3, \quad p_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

в) стационарность по u:

$$\widehat{L}_u = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0.$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то из в) следует, что $p_2 \equiv 0$; тогда из а) $p_1 \equiv 0$, и, значит, в силу условия б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Итак, при $\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет. Положим $\lambda_0 = 1/2$. Из системы уравнений Эйлера вытекает, что $\ddot{p}_2 + p_2 = 0$. Общее решение этого дифференциального уравнения: $p_2 = C' \sin t + C \cos t$. Поскольку $p_2(\pi/2) = 0$, то $p_2 = C \cos t$. Значит, по условию стационарности $u = C \cos t$. Таким образом, получили дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x = C \cos t$. Общее решение: $x = (C_1 + C_2 t) \sin t + C_3 \cos t$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 определяются из заданных условий на концах. Единственная допустимая экстремальная пара: $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = \left(\frac{2}{\pi} t \sin t, \ \frac{4}{\pi} \cos t\right)$.

4. Покажем с помощью непосредственной проверки, что $(\widehat{x}(\cdot), \ \widehat{u}(\cdot)) \in \operatorname{abs\,min}$. Возьмем такие функцию $x(\cdot)$ и управление $u(\cdot)$, чтобы пара $(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot), \ \widehat{u}(\cdot) + u(\cdot))$ была допустимой. Для этого надо взять функцию $x(\cdot) \in C^2([0, \pi/2])$, $x(0) = \dot{x}(0) = x(\pi/2) = 0$, и управление $u = \ddot{x} + x$. Имеем

$$\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot), \widehat{u}(\cdot) + u(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = \\ = 2\int_0^{\pi/2} \widehat{u} u \, dt + \int_0^{\pi/2} u^2 \, dt \geqslant 2 \int_0^{\pi/2} \widehat{u}(\ddot{x} + x) \, dt.$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле с учетом условий на концах функции $x(\cdot)$ и управления $\widehat{u}(\cdot)$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \hat{u}(\ddot{x} + x)\,dt = \hat{u}\dot{x}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left(x\hat{u} - \dot{\hat{u}}\dot{x}\right) dt =$$

$$= -\dot{\hat{u}}x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left(\hat{u} + \ddot{\hat{u}}\right) x\,dt = 0.$$

Таким образом, $\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot),\ \hat{u}(\cdot) + u(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot))$ и, следовательно, $(\hat{x},\ \hat{u}) \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность пар $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nx(\cdot)$, $u_n(\cdot) = \hat{u}(\cdot) + nu(\cdot)$, $u = \ddot{x} + x$, где $x(\cdot)$ — некоторая функция из $C_0^2([0, \pi/2])$ такая, что $\ddot{x} + x \neq 0$ (например, $x(t) = t^2(t - \pi/2)^2$, $u = \ddot{x} + x$); тогда $\mathcal{J}(x_n(\cdot),\ u_n(\cdot)) \to \to +\infty$.

Задачи

Решить задачи Лагранжа 8.1 — 8.21

8.1. $\int_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1.$

8.2 $\int_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$

8.3. $\int_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 0,\ x(1) = \operatorname{sh} 1,$

$\dot{x}(1) = \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1.$

8.4. $\int_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,$

$x(1) = \operatorname{sh} 1,\ \dot{x}(1) = \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1.$

8.5. $\int_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} + x = u,\ \dot{x}(0) = 1.$

8.6. $\int_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} + x = u,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

8.7. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \text{extr};$

$\ddot{x} + x = u,\ x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$

8.8. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \text{extr};\ \ddot{x} + x = u,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$

$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = -\frac{\pi}{2}.$

8.9. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr};\ \ddot{x} + x = u.$

8.10. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr};\ \ddot{x} + x = u,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

8.11. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to \text{extr};$

$\ddot{x} + x = u,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

8.12. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr};$

$\ddot{x} + x = u,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

8.13. $\int\limits_0^{1} u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr};\ \ddot{x} - x = u.$

8.14. $\int\limits_0^{1} u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr};\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1.$

8.15. $\int\limits_0^{1} u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr};$

$\ddot{x} - x = u,\ x(0) = x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

8.16. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr};$

$\ddot{x} + x = u,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

8.17. $\int_0^1 (x^2+u^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x} = x + u,\ x(1) = 1.$

8.18. $\int_0^1 (x^2+2u^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x} = \frac{x}{\sqrt{2}} + u,\ x(0) = 1.$

В задачах 8.19, 8.20 выписать экстремали и уравнения для определения всех неизвестных констант. Определить характер доставляемого экстремума.

8.19. $\int_0^1 (x^2+u^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} + \sqrt{2}\,x = u,\ x(0) = 1.$

8.20. $\int_0^1 (x^2+u^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} - \sqrt{2}\,\dot{x} = u,\ x(0) = 1.$

8.21. $\int_0^T u^2\,dt + x^2(T) \to \mathrm{extr};\ \ddot{x} + x = u,\ x(0) = 1.$

В задачах 8.22, 8.23 найти допустимые экстремали.

8.22. $\int_0^{\pi/2} u^2\,dt + \dot{x}(0) \to \mathrm{extr};$

$$\ddot{x} + x = u,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

8.23. (P) $\int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \to \mathrm{extr};\ \dot{x}y - \dot{y}x = 1,$

$$x(0) = 0,\ x(1) = \sin 1,\ y(0) = 1,\ y(1) = \cos 1.$$

§ 9. ЛЯПУНОВСКИЕ ЗАДАЧИ

9.1. Элементарная задача оптимального управления.

9.1.1. Постановка задачи. Пусть $\mathcal{U}$ — произвольное множество из $\mathbf{R}^r$, φ: $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$. Задача в пространстве $KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^r)$:

$$f(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t, u(t))\,dt \to \inf;\ u(t) \in \mathcal{U}, \tag{3}$$

называется *элементарной задачей оптимального управления*.

9.1.2. Правило решения. Для решения задачи (з) следует при каждом $t \in [t_0, t_1]$ найти такое $\hat{u}(t)$, что

$$\varphi(t, \hat{u}(t)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \varphi(t, u). \qquad (*)$$

Это $\hat{u}(\cdot)$ и будет решением. Соотношение (*) назовем *принципом минимума для* (з).

9.1.3. Необходимое и достаточное условие экстремума в элементарной задаче оптимального управления.

Теорема. а) *Пусть в задаче* (з) *функция* φ *непрерывна в* $[t_0, t_1] \times \mathcal{U}$. *Если функция* $\hat{u}(\cdot)$ *доставляет абсолютный минимум в задаче* (з), *то для любой точки непрерывности функции* $\hat{u}(\cdot)$ *выполнено соотношение*

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \varphi(t, u) = \varphi(t, \hat{u}(t)). \qquad (1)$$

б) *Пусть* $\hat{u}(\cdot)$ *кусочно-непрерывна и в точках непрерывности* $\hat{u}(\cdot)$ *выполнено соотношение* (1). *Тогда* $\hat{u}(\cdot) \in \operatorname{abs\,min}$ з.

Замечание. Утверждения, аналогичные а) и б), оказываются верными, если термины «кусочно-непрерывна» и «для любой точки непрерывности» заменить на термины «измерима» и «почти всюду».

$\lhd$ Докажем утверждение а) от противного. Пусть существуют τ (где $\hat{u}(\cdot)$ непрерывна) и $v \in \mathcal{U}$ такие, что $\varphi(\tau, v) < \varphi(\tau, \hat{u}(\tau))$. Вследствие непрерывности функций $t \to \varphi(t, v)$ и $t \to \varphi(t, \hat{u}(t))$ (в окрестности точки τ) найдется такой интервал $\Delta = [\tau - \delta, \tau + \delta]$, что $\varphi(t, v) < \varphi(t, \hat{u}(t))$ при $t \in \Delta$. Положим $\tilde{u}(t) = u(t)$ при $t \notin \Delta$ и $\tilde{u}(t) = v$ при $t \in \Delta$. Тогда $f(\tilde{u}(\cdot)) < f(\hat{u}(\cdot))$ вопреки минимальности $\hat{u}(\cdot)$. Утверждение б) очевидно.

Об измеримом случае см. в АТФ (с. 360). $\rhd$

9.2. Принцип Лагранжа для ляпуновских задач.

9.2.1. Постановка задачи. Пусть Δ — заданный отрезок числовой прямой (конечный или бесконечный), $\mathcal{U}$ — произвольное множество из $\mathbf{R}^r$, f_i: $\Delta \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$, X — линейное пространство, g_i: $X \to \mathbf{R}$ — функции, выпуклые для $i = 0, 1, \ldots, m'$ и аффинные для $i = m' + 1, \ldots, m$, $A \subset X$ — выпуклое множество.

Экстремальную задачу

$$\mathcal{F}_0(u(\cdot)) + g_0(x) = \int_\Delta f_0(t, u(t))\,dt + g_0(x) \to \inf;$$

$$\mathscr{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x) = \tag{з}$$
$$= \int_\Delta f_i(t, u(t))\,dt + g_i(x) \begin{cases} \leqslant 0, & i = 1, \ldots, m', \\ = 0, & i = m'+1, \ldots, m, \end{cases}$$
$$x \in A, \; u(t) \in \mathscr{U},$$

называют *ляпуновской задачей.* К ним сводятся линейные задачи оптимального управления (АТФ, с. 347).

9.2.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(u(\cdot), x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\mathscr{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x)).$$

2. Выписать необходимые условия:

а) принцип минимума по u и x:

$$\min_{u \in \mathscr{U}} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, \widehat{u}(t)), \tag{*}$$

$$\min_{x \in A} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i g_i(\widehat{x}); \tag{**}$$

б) дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i(\mathscr{F}_i(\widehat{u}(\;)) + g_i(\widehat{x})) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

в) неотрицательности:

$$\lambda_i \geqslant 0, \; i = 0, 1, \ldots, m'.$$

3. Найти допустимые экстремали, т. е. допустимые $\widehat{x}$ и $\widehat{u}(\cdot)$, удовлетворяющие необходимым условиям п. 2 с множителями Лагранжа, не равными одновременно нулю. При этом бывает удобно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Отыскать решение среди найденных допустимых экстремалей или показать, что его нет.

Выписанные условия находятся в полном соответствии с принципом Лагранжа. Действительно, в соответствии с идеей Лагранжа следует рассмотреть две задачи:

$$\mathscr{L}(u(\cdot), \widehat{x}, \lambda) \to \inf; \; u(t) \in \mathscr{U}, \tag{з$_1$}$$

$$\mathscr{L}(\widehat{u}(\cdot), x, \lambda) \to \inf; \; x \in A. \tag{з$_2$}$$

Задача (з$_1$) — это элементарная задача оптимального управления. Соотношение (*) есть не что иное, как принцип минимума для (з$_1$), а соотношения б), в) и (**) — не что иное, как принцип Лагранжа для ($з_2$) (напомним, что в точности эту задачу мы исследовали в § 4).

9.2.3. Необходимые и достаточные условия.

Теорема. *Пусть функции* $f_i\colon \Delta \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ — *непрерывные,* $g_i\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ — *выпуклые для* $i = 0, 1, \ldots, m'$ *и аффинные для* $i = m' + 1, \ldots, m$, $A \subset X$ *выпукло,* $\mathscr{V}$ — *совокупность измеримых отображений* $u\colon \Delta \to \mathscr{U}$, *для которых функции* $t \to f_i(t, u(t))$ *суммируемы на* Δ.

Необходимые условия. *Если пара* $(\widehat{u}(\cdot), \widehat{x})$ *является решением задачи* (з) *п.* 9.2.1, *то найдется ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *такой, что выполнены соотношения* а) — в) *п.* 9.2.2.

Достаточные условия. *Если* $(\widehat{u}(\cdot), \widehat{x}) \in \mathscr{V} \times A$ *и существует ненулевой вектор* $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_0 \neq 0$, *такой, что выполняются соотношения* а) — в) *п.* 9.2.2, *то* $(\widehat{u}(\cdot), \widehat{x}) \in \operatorname{abs\,min}$ з (АТФ, с. 355).

9.2.4. Теорема двойственности. Здесь мы ограничим себя задачами вида

$$\mathscr{F}_0(u(\cdot)) = \int_\Delta f_0(t, u(t))\,dt \to \inf; \tag{з}$$

$$\mathscr{F}_i(u(\cdot)) = \int_\Delta f_i(t, u(t))\,dt \leqslant 0, \ u(\cdot) \in \mathscr{V}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Это — частный случай задачи (з) п. 9.2.1, когда $g_i = 0$ и $m = m'$. Включим (з) в семейство задач

$$\mathscr{F}_0(u(\cdot)) \to \inf; \ \mathscr{F}_i(u(\cdot)) + \alpha_i \leqslant 0. \tag{з(α)}$$

Определим S-функцию задачи (з(α)) равенством

$$S(\alpha) = \inf\{\mathscr{F}_0(u(\cdot)) \mid \mathscr{F}_i(u(\cdot)) + \alpha_i \leqslant 0, \ u(\cdot) \in \mathscr{V}\}, \ \alpha \in \mathbf{R}^m.$$

Теорема двойственности для ляпуновских задач. *Пусть* Δ — *отрезок в* $\mathbf{R}$ (*конечный или бесконечный*), $\mathscr{U}$ — *сепарабельное топологическое пространство, функции* $f_i\colon \Delta \times \mathscr{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывны,* $\mathscr{V}$ — *совокупность измеримых отображений* $u\colon \Delta \to \mathscr{U}$ *таких, что функции* $t \to f_i(t, u(t))$ *суммируемы на* Δ. *Если функция* $\alpha \to S(\alpha)$ *непрерывна в точке* $\alpha = 0$, *то для любого* $\alpha \in \operatorname{int} \operatorname{dom} S$

$$S(\alpha) = \sup_{\substack{\mu \geqslant 0 \\ \mu \in \mathbf{R}^m}} \left(\langle \mu, \alpha \rangle + \int_\Delta \Phi(t, \mu)\,dt \right),$$

где $\Phi(t, \mu) = \inf\limits_{u \in \mathscr{U}} \left(f_0(t, u) + \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i(t, u) \right)$ (АТФ, с. 363).

Задачи

Решить задачи 9.1—9.7.

9.1. $\int\limits_{-1}^{1}(x^3-3t^4x)\,dt\to\text{extr}.$

9.2. $\int\limits_{0}^{1}(x^2+tx)\,dt\to\text{extr};\ x(0)=x_0,\ x(1)=x_1.$

9.3. $\int\limits_{-a}^{a}(t^2x+x^3/3-a^2x)\,dt\to\text{extr}.$

9.4. $\int\limits_{0}^{T_0}(6atx-x^3)\,dt\to\text{extr}.$

9.5. $\int\limits_{0}^{1}t^2\dot{x}^2dt\to\text{extr};\ x(0)=0,\ x(1)=1.$

9.6. $\int\limits_{0}^{\pi}\cos^2 t\dot{x}^2\,dt\to\text{extr};\ x(0)=0,\ x(\pi)=1.$

9.7. (P) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{t+h}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt\to\inf;\ x(0)=0,\ x(1)=\xi.$

Методом двойственности найти численные значения задач 9.8—9.12.

9.8. (P) $\int\limits_{0}^{1}\frac{u^2}{2}\,dt\to\inf;\ \dot{x}=x+u,\ x(0)=0,\ x(1)=\xi.$

9.9. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ddot{x}^2}{2}\,dt\to\inf;$

$$x(0)=\dot{x}(0)=0,\ x(1)=\xi_1,\ \dot{x}(1)=\xi_2.$$

9.10. (P) $\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha}\frac{|\dot{x}|^{\beta}}{\beta}\,dt\to\inf;$

$$x(0)=0,\ x(1)=\xi\quad(\alpha>0,\ \beta>1)$$

(обобщенный пример Вейерштрасса; частные случаи: пример 4 п. 5.3, задачи 5.21, 5.25, 9.5).

9.11. $\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)\dot{x}^2}{2}\,dt \to \inf$; $(\varphi(t) \geqslant 0)$, $x(0) = 0$, $x(1) = \xi$

(частный случай — задача 9.6).

9.12. $\int\limits_0^1 \frac{\dot{x}^2}{2}\,dt \to \inf$; $\int\limits_0^1 x\,dt = \xi$, $x(0) = x(1) = 0$.

Решить задачи 9.13 — 9.16.

9.13. Среди неотрицательных функций $x(\cdot)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, принимающих нулевые значения на концах и ограничивающих заданную площадь, найти кривую минимальной длины (задача Дидоны).

9.14. (P) Доказать неравенство Карлсона:

$$\left(\int\limits_I x\,dt\right)^4 \leqslant K(I)\left(\int\limits_I x^2\,dt\right)\left(\int\limits_I t^2x^2\,dt\right),$$

имеющее место для любой функции $x(\cdot)$ из $L_2(I)$, для которой $\int\limits_I t^2x^2dt < \infty$, где $I = \mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+$, $K(\mathbf{R}_+) = \pi^2$, $K(\mathbf{R}) = 4\pi^2$.

9.15. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \inf$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(\tau_k) = \xi_k$,

$$0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < 1,\ \xi_k \in \mathbf{R},\ k = 1, \ldots, m$$

(задача о сплайнах).

9.16. (P) Среди плотностей вероятности $p(\cdot)$ случайных величин с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией найти плотность с максимальной дифференциальной энтропией (задача Шеннона).

Отметим, что большинство задач § 8 может быть решено сведением их к ляпуновской задаче.

§ 10. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

10.1. Принцип максимума Понтрягина.

10.1.1. Постановка задачи. *Задачей оптимального управления* (в понтрягинской форме) будем называть следующую задачу в пространстве $KC^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times KC(\Delta, \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2$:

$$\mathscr{B}_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \to \inf; \tag{з}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

$$u(t) \in \mathscr{U} \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$\mathscr{B}_i(x(\ ), u(\cdot), t_0, t_1) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m', \tag{3}$$

$$\mathscr{B}_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = 0, \quad i = m' + 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где

$$\mathscr{B}_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))\, dt +$$
$$+ \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Здесь Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, f_i: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ — функции $n + r + 1$ переменных, ψ_i: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — функции $2n + 2$ переменных, φ: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$ — вектор-функция $n + r + 1$ переменных, $\mathscr{U}$ — произвольное множество из $\mathbf{R}^r$. Частным случаем задачи (з) является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Вектор-функция $x(\cdot)$ называется *фазовой переменной*, $u(\cdot)$ — *управлением*. Уравнение (1), называемое *дифференциальной связью*, должно выполняться во всех точках непрерывности управления $u(\cdot)$ на интервале (t_0, t_1) (это множество в п. 10.1 будет обозначаться через T).

Четверка $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ называется *управляемым процессом* в задаче оптимального управления, если $x(\cdot) \in KC^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $u(\cdot) \in KC(\Delta, \mathbf{R}^r)$ и выполняются дифференциальная связь (1) и ограничение типа включения (2). Управляемый процесс является *допустимым*, если, кроме того, выполняются соотношения (3) и (4).

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется (локально) *оптимальным* (или еще говорят *оптимальным в сильном смысле процессом*), если существует $\delta > 0$ такое, что для всякого допустимого управляемого процесса $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, для которого

$$\|(x(\cdot), t_0, t_1) - (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)\|_{C(\Delta, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^2} < \delta,$$

выполняется неравенство $\mathscr{B}_0(\xi) \geqslant \mathscr{B}_0(\hat{\xi})$.

10.1.2. Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u)) \right) dt +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),$$
$$p(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{n*}).$$

2. Выписать необходимые условия оптимальности процесса $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\ ), \widehat{u}(\ ), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$:

а) стационарности по x — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{p}(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{f}_{ix}(t) - p(t)\widehat{\varphi}_x(t)$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u));$$

б) трансверсальности по x:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{t}_k) = (-1)^k \widehat{l}_{x_k} \Leftrightarrow p(\widehat{t}_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widehat{\psi}_{ix_k}, \quad k = 0, 1,$$

для терминанта

$$l = l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1);$$

в) оптимальности по u — принцип минимума в лагранжевой форме:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \widehat{L}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u) = \widehat{L}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, \widehat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), u) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))$$

или в гамильтоновой (понтрягинской) форме в виде *принципа максимума*:

$$\max_{u \in \mathcal{U}} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t)),$$

где

$$H(t, x, u, p) = p\varphi(t, x, u) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u)$$

— функция Понтрягина;

г) стационарности по t_k:

$$\widehat{\mathscr{L}}_{t_k}=0 \Leftrightarrow (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\widehat{f}_i(\widehat{t}_k)+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\left(\widehat{\psi}_{it_k}+\widehat{\psi}_{ix_k}\dot{\widehat{x}}(\widehat{t}_k)\right)= \\ =0 \Leftrightarrow \widehat{H}(\widehat{t}_k)=(-1)^{k+1}\widehat{l}_{t_k},\ k=0,1$$

(условие стационарности выписывается только для подвижных концов);

д) дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i\mathscr{B}_i(\widehat{\xi})=0,\quad i=1,\ldots,m';$$

е) неотрицательности:

$$\lambda_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\ldots,m'.$$

3 Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполнены условия п. 2 с множителями Лагранжа λ и $p(\ )$, одновременно не равными нулю. При этом бывает удобно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0=0$ и $\lambda_0\neq\neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4 Отыскать решение среди найденных допустимых экстремальных процессов или показать, что решения нет.

Можно показать, что описанное выше правило решения находится в полном соответствии с принципом Лагранжа снятия ограничений.

10.1.3. Необходимые условия экстремума.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $\widehat{\xi}=(\widehat{x}(\ ),\widehat{u}(\cdot),\widehat{t}_0,\widehat{t}_1)$ — *оптимальный процесс в задаче оптимального управления, функции* f_i, $i=0, 1, \ldots, m$, φ *и их частные производные по* x *непрерывны в множестве* $\mathscr{V}\times\mathscr{U}$, *где* $\mathscr{V}$ — *некоторая окрестность множества* $\{(t,\widehat{x}(t))\mid t\in[\widehat{t}_0,\widehat{t}_1]\}$, *а функции* ψ_i, $i=0, 1, \ldots, m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\widehat{t}_0,\ \widehat{x}(\widehat{t}_0),\ \widehat{t}_1,\widehat{x}(\widehat{t}_1))$ *(условие гладкости).*

Тогда найдутся множители Лагранжа $\lambda=(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\lambda_m)$, $p(\ )\in KC^1([\widehat{t}_0,\widehat{t}_1],\mathbf{R}^{n*})$, *не равные одновременно нулю и такие, что для функции Лагранжа* $\mathscr{L}$ *(п.* 10.1.2) *выполнены условия:*

а) *стационарности по* x — *уравнение Эйлера:*

$$\dot{p}(t)+p(t)\widehat{\varphi}_x(t)=\widehat{f}_x(t)\ \ \forall t\in T,$$

где

$$f(t, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u);$$

б) *трансверсальности по* x:

$$p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1};$$

в) *оптимальности по* u:

$$f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) \geqslant \\ \geqslant \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \quad \forall t \in T, \ \forall u \in \mathcal{U};$$

г) *стационарности по* t_k, $k = 0, 1$,

$$-\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x_0}\hat{\varphi}(\hat{t}_0) = 0, \quad \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x_1}\hat{\varphi}(\hat{t}_1) = 0;$$

д) *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_i \mathscr{B}_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

е) *неотрицательности*:

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m'.$$

10.1.4. Доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи со свободным концом. Приведем формулировку и доказательство принципа максимума Понтрягина для частного случая задачи оптимального управления — задачи со свободным концом и закрепленным временем:

$$\mathscr{B}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt + \psi(x(t_1)) \to \inf; \qquad (з)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \ u(t) \in \mathcal{U}, \ x(t_0) = x_0.$$

Теорема. *Пусть* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — *оптимальный процесс в задаче оптимального управления* (з), *функции* f; φ *и их частные производные по* x *непрерывны в множестве* $\mathscr{V} \times \mathcal{U}$, *где* $\mathscr{V}$ — *некоторая окрестность множества* $\{(t, \hat{x}(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, $\psi \in D(\hat{x}(t_1))$ (*условие гладкости*), $\mathcal{U}$ — *произвольное множество из* $\mathbf{R}^r$.

Тогда выполняется условие оптимальности по u:

$$f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) \geqslant \\ \geqslant \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \quad \forall t \in T, \ \forall u \in \mathcal{U}, \qquad (1)$$

где $p(\cdot)$ — *единственное решение дифференциального* *уравнения*

$$\dot{p}(t) + p(t)\,\widehat{\varphi}_x(t) = \widehat{f}_x(t) \quad \forall t \in T \tag{2}$$

с краевым условием

$$p(t_1) = -\psi'(\widehat{x}(t_1)). \tag{3}$$

Отметим, что множитель Лагранжа λ_0 при функционале $\mathscr{B}$ оказывается равным единице, а условие трансверсальности по $x(t_0)$ несущественно.

Единственность решения уравнения (2) с краевым условием (3) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем (АТФ, с. 191).

◁ А) Игольчатые вариации. Зафиксируем точку $\tau \in T$, элемент $v \in \mathscr{U}$ и такое малое число $\alpha \geqslant 0$, что $[\tau - \alpha, \tau] \subset T$.

Управление

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \widehat{u}(t), & t \notin [\tau - \alpha, \tau), \\ v, & t \in [\tau - \alpha, \tau), \end{cases}$$

назовем *элементарной* (*игольчатой*) *вариацией управления* $\widehat{u}(\cdot)$. Пусть $x_\alpha(t)$ — решение уравнения $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_\alpha(t))$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. По локальной теореме существования (АТФ, с. 186—189) функция $x_\alpha(\cdot)$ определена при $\alpha \leqslant \alpha_0$ в некоторой окрестности точки t_0, но из леммы 1, формулируемой ниже, следует, что на самом деле вектор-функция $x_\alpha(\cdot)$ определяется единственным образом на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Вектор-функция $x_\alpha(\cdot)$ называется *элементарной* (*игольчатой*) *вариацией функции* $\widehat{x}(\cdot)$, а пара $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ — *элементарной вариацией процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$. Пару (τ, v), определяющую эту вариацию, будем называть *элементарной иголкой*.

Б) Лемма 1 (о свойствах элементарной вариации). *Пусть* (τ, v) — *фиксированная элементарная иголка. Тогда существует число* $\alpha_0 > 0$ *такое, что* $[\tau - \alpha_0, \tau] \subset T$ *и для любого* $\alpha \in [0, \alpha_0]$ *выполнено следующее*:

1) *функция* $x_\alpha(\cdot)$ *определена на всем отрезке* $[t_0, t_1]$; *при этом*

$$x_\alpha(t) \equiv \widehat{x}(t) \ \ \forall t \in [t_0, \tau - \alpha], \qquad \|x_\alpha(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} \to 0$$

при $\alpha \to +0$;

2) $x_\alpha(t) - \widehat{x}(t) = \alpha y(t) + r_\alpha(t) \ \ \forall t \in [\tau, t_1]$, *причем* $\sup\limits_{t \in [\tau, t_1]} \dfrac{|r_\alpha(t)|}{\alpha} \to 0$ *при* $\alpha \to +0$;

3) *функция* $y(\cdot)$ *кусочно-непрерывно дифференцируема на* $[\tau, t_1]$ *и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot{y}(t) = \hat{\varphi}_x(t)\, y(t) \quad \forall t \in [\tau, t_1] \cap T \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(\tau) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau) = \Delta\varphi(\tau, v).$$

Доказательство леммы следует из двух основополагающих фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений: локальной теоремы существования и теоремы о непрерывной дифференцируемости решения по начальным данным. Мы не приводим их здесь, отсылая к АТФ, с. 89—91.

В) Лемма 2 (о приращении функционала). *Пусть* (τ, v) — *фиксированная элементарная иголка,* $\chi(\alpha) = \mathscr{B}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$. *Тогда функция* $\chi(\ )$ *дифференцируема справа в нуле и*

$$\chi'(+0) = f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{f}(\tau) - p(\tau)y(\tau).$$

◁◁ Используя теорему о среднем для числовых функций, правило дифференцирования под знаком интеграла и лемму 1, получим

$$\chi'(+0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\chi(\alpha) - \chi(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t))\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt\right) + \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\psi(x_\alpha(t_1)) - \psi(\hat{x}(t_1))}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\left(\int_{\tau-\alpha}^{\tau} (f(t, x_\alpha(t), v) - \hat{f}(t))\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t_1} (f(t, x_\alpha(t), \hat{u}(t)) - \hat{f}(t))\, dt\right) + \psi'(\hat{x}(t_1))\, y(t_1) =$$

$$= f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{f}(\tau) + \int_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x(t)\, y(t)\, dt + \psi'(\hat{x}(t_1))\, y(t_1).$$

Выражая $\hat{f}_x$ из уравнения (2) и учитывая уравнение (4), имеем

$$\int_\tau^{t_1} \hat{f}_x(t)\, y(t)\, dt = \int_\tau^{t_1} (\dot{p}(t) + p(t)\,\hat{\varphi}_x(t))\, y(t)\, dt =$$

$$= \int_\tau^{t_1} (\dot{p}(t)\, y(t) + p(t)\, \dot{y}(t))\, dt = \int_\tau^{t_1} \frac{d}{dt}(p(t)\, y(t))\, dt =$$

$$= p(t_1)\, y(t_1) - p(\tau)\, y(\tau).$$

Подставляя найденное значение $\int_\tau^{t_1} \hat{f}_x y\, dt$ в выражение для $\chi'(+0)$, с учетом условия (3) получим искомое представление. $\triangleright\triangleright$

Г) Завершение доказательства. Из леммы 1 следует, что если $\alpha \in [0, \alpha_0]$, то $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ — допустимый управляемый процесс и $x_\alpha(\cdot)$ равномерно стремится к $\hat{x}(\cdot)$. Поскольку $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — оптимальный процесс, то при малых $\alpha > 0$

$$\mathscr{B}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) \geqslant \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \Leftrightarrow \chi(\alpha) \geqslant \chi(0).$$

Отсюда по лемме 2 $\chi'(+0) \geqslant 0$, и из выражения для $\chi'(+0)$ и $y(\tau)$ вытекает, что

$$f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - p(\tau)\,\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) \geqslant$$

$$\geqslant \hat{f}(\tau) - p(\tau)\,\hat{\varphi}(\tau) \quad \forall \tau \in T \text{ и } \forall v \in \mathscr{U},$$

т. е. выполняется соотношение (1). $\triangleright$

Переходим к доказательству принципа максимума в общем случае.

10.1.5. Вспомогательные утверждения и построения.

А) Лемма о центрированной системе. *Пусть K — компакт, $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — система замкнутых подмножеств K, любая конечная подсистема которой имеет непустое пересечение (центрированная система). Тогда пересечение всех множеств системы $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ непусто.*

$\triangleleft\triangleleft$ Обозначим через $\mathscr{O}_\alpha$ дополнение к K_α в K ($\mathscr{O}_\alpha = K \setminus K_\alpha$). Тогда $\mathscr{O}_\alpha$ открыто в K. Если $\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha = \varnothing$, то $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathscr{O}_\alpha = K$, т. е. $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ есть открытое покрытие компакта K. По определению компакта можно тогда найти такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, что $\bigcup_{i=1}^m \mathscr{O}_{\alpha_i} = K$. Но тогда $\bigcap_{i=1}^m K_{\alpha_i} = \varnothing$ в противоречии с определением центрированной системы. Значит, $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha \neq \varnothing$. $\triangleright\triangleright$

Б) Игольчатые вариации. В предыдущем пункте мы смогли обойтись одной иголкой. Здесь это невозможно и приходится рассматривать наборы (пакеты) иголок. Переходим к определению таких пакетов.

Пусть $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ — оптимальный процесс. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы из ε-близости графиков $\Gamma_{\hat{x}}$ и Γ_x для допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ вытекало неравенство $\mathscr{B}_0(x(\ ), u(\ ), t_0, t_1) \geqslant \mathscr{B}_0(\hat{x}(\ ), \hat{u}(\ ), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$. Продолжим $\hat{u}(\cdot)$ на отрезок $[\hat{t}_0 - \varepsilon, \hat{t}_1 + \varepsilon]$ константами $\hat{u}(\hat{t}_0)$ и $\hat{u}(\hat{t}_1)$.

Включим процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ в конечно-параметрическое семейство вариаций. Для этого фиксируем натуральное N и два набора: $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$, $\hat{t}_0 < \tau_1 \leqslant \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N < \hat{t}_1$ ($\tau_i \in T \subset (\hat{t}_0, \hat{t}_1)$, где T — множество точек непрерывности $\hat{u}(\ )$), и $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_N)$, $v_i \in \mathscr{U}$. Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\alpha_i \geqslant 0$. Через $|\bar{\alpha}|_1$ будем обозначать $\sum\limits_{i=1}^N |\alpha_i|$. Положим

$$u_{\bar{\alpha}}(t) = u_{\bar{\alpha}}(t, \bar{\tau}, \bar{v}) =$$

$$= \begin{cases} \hat{u}(t), & t \in [\hat{t}_0 - \varepsilon, \hat{t}_1 + \varepsilon] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^N \Delta_i, \\ v_i, & t \in \Delta_i, \quad \Delta_i = [\tau_i - (N-i)|\bar{\alpha}|_1 - \alpha_i, \ \tau_i - (N-i)|\bar{\alpha}|_1). \end{cases}$$

Некоторые точки τ_i могут совпадать. Однако полуинтервалы Δ_i (имеющие длины α_i) выбраны так, что они не пересекаются и при малом $|\bar{\alpha}|_1$ лежат в T. Рассмотрим решение уравнения

$$\dot{x} = \varphi\left(t, x, u_{\bar{\alpha}}(t)\right)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где точка (t_0, x_0) находится в ε-окрестности точки $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0))$. Это решение обозначим $x_\eta(\cdot)$, где $\eta = (t_0, x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{R}^{N+n+1}$.

В) О системах дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ $(G \in \mathscr{O}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n))$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по x функция. Тогда, *если*

$\bar{x}(\cdot)$ — решение этой системы, график которого содержится в G, определенное на отрезке $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$, то найдутся такие $\delta > 0$ и окрестность G_1 графика вектор-функции $\bar{x}(\cdot)$, что для любого $(t_0, x_0) \in G_1$ существует единственное решение $X(\cdot, t_0, x_0)$ задачи Коши (1), определенное на $[\bar{t}_0 - \delta, \bar{t}_1 + \delta]$, функция $(t, t_0, x_0) \mapsto X(t, t_0, x_0)$ непрерывно дифференцируема в области $(\bar{t}_0 - \delta, \bar{t}_1 + \delta) \times G_1$ и при этом

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)\bigg|_{x_0 = x(t_0)} = \Omega(t, t_0),$$

$$\frac{\partial X}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)\bigg|_{x_0 = \bar{x}(t_0)} = -\Omega(t, t_0) F(t_0, \bar{x}(t_0)),$$

где $\Omega(t, t_0)$ — фундаментальная система решений уравнения в вариациях:

$$\frac{d}{dt}\Omega(t, t_0) = F_x(t, \bar{x}(t))\,\Omega(t, t_0), \quad \Omega(t_0, t_0) = I.$$

Это — классическая теорема о существовании и непрерывно дифференцируемой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных (АТФ, с. 195—204).

Г) Лемма об игольчатой вариации. *Пусть N, $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$, $\hat{t}_0 < \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N < \hat{t}_1$, $\tau_i \in T$, $\bar{v} = (v_1, \ldots \ldots, v_N)$, $v_i \in \mathcal{U}$, фиксированы. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что если $0 < |\alpha|_1 < \varepsilon_0$, $|x_0 - \hat{x}(\hat{t}_0)| < \varepsilon_0$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon_0$, то $\Delta_i \subset T$ и, кроме того,*

1. *Траектория $x_\eta(\ )$ определена на отрезке $[\hat{t}_0 - \varepsilon_0, \hat{t}_1 + \varepsilon_0]$, и $\|x_\eta(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([\hat{t}_0 - \varepsilon_0, \hat{t}_1 + \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)} \to 0$ при $\eta \to \hat{\eta} = (\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), 0, \ldots, 0)$.*

2. *Отображение $(t, \eta) = (t, t_0, x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \to x_\eta(t)$ продолжается до непрерывно дифференцируемого отображения в некоторой окрестности $(\hat{t}_1, \hat{\eta}) = (\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), 0, \ldots, 0)$, и при этом*

$$\frac{\partial x_\eta(t)}{\partial \alpha_k}\bigg|_{\eta = \hat{\eta}} = \Omega(t, \tau_k)\,\Delta\varphi(\tau_k, v_k), \tag{2}$$

$$\frac{\partial x_\eta(t)}{\partial x_0}\bigg|_{\eta = \hat{\eta}} = \Omega(t, \hat{t}_0), \tag{3}$$

$$\frac{\partial x_\eta(t)}{\partial t_0}\bigg|_{\eta = \hat{\eta}} = -\Omega(t, \hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0), \tag{4}$$

$$\frac{\partial x_{\hat{\eta}}(t)}{\partial t}\bigg|_{t = \hat{t}_1} = \hat{\varphi}(\hat{t}_1), \tag{5}$$

где $\Omega(t, t_0)$ — *фундаментальная система решений уравнения в вариациях:*

$$\dot{\Omega}(t, t_0) = \hat{\varphi}_x(t)\Omega(t, t_0), \quad \Omega(t, t_0) = I.$$

Наметим путь доказательства леммы. Формула (2) составляет содержание леммы о свойствах элементарной вариации из предыдущего пункта. Действительно, если зафиксировать $t_0 = \hat{t}_0$, $x_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$ и положить $\bar{\alpha} = (0, \ldots \ldots, \alpha, \ldots, 0)$ (число α является k-й компонентой вектора $\bar{\alpha}$), то η становится зависящим только от α, а $x_\eta(\cdot)$ превращается в $x_\alpha(\cdot)$ из предыдущего пункта. Тогда очевидно, что утверждение 3) леммы о свойствах элементарной вариации и формула (2) означают одно и то же. Формула (5) сразу следует из определения. Предположим теперь, что $\hat{u}(\cdot)$ непрерывна. Тогда формулы (3) и (4) вытекают из теоремы о дифференцируемой зависимости решений от начальных данных, сформулированной в В). Если же $\hat{u}(\cdot)$ кусочно-непрерывна, то нужно применить теорему из В) несколько раз на каждом участке непрерывности и мы получим (3) и (4). Подробнее см. в АТФ, с. 335 и далее.

10.1.6. Завершение доказательства. Снова фиксируем N и $(\bar{\tau}, \bar{v}) \in T^N \times \mathcal{U}^N$.

А) Редукция к конечномерной задаче. Обозначим

$$z = (t_1, \eta) = (t_1, t_0, x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N), \quad z \in \mathbf{R}^{N+n+2},$$

положим

$$F_i(z) = F_i(t_1, t_0, x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f_i\left(t, x_\eta(t), u_{\bar{\alpha}}(t)\right) dt + \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_\eta(t_1))$$

и рассмотрим задачу

$$F_0(z) \to \inf;\ F_i(z) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m';\ F_i(z) = 0,$$
$$i = m' + 1, \ldots, m, \quad \bar{\alpha} \geqslant 0. \qquad (з_{\bar{\tau},\bar{v}})$$

В силу леммы об игольчатой вариации $F_i \in C^1(W)$, где W — окрестность точки $\hat{z} = (\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), 0, \ldots, 0)$ в $\mathbf{R}^{N+n+2}$.

Лемма. $\hat{z} = (\hat{t}_1, \hat{\eta}) = (\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), 0, \ldots, 0) \in \in \operatorname{loc\,min} з_{\bar{\tau}\bar{v}}$.

◁◁ Пусть ε выбрано так, что из ε-близости графиков Γ_x и $\Gamma_{\hat{x}}$ (где $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ — допустимый процесс) следует неравенство $\mathscr{B}_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \geqslant \mathscr{B}_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$. Выберем теперь ε_0 так, чтобы из соотношений $0 \leqslant |\bar{\alpha}|_1 < \varepsilon_0$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon_0$, $|x_0 - \hat{x}(\hat{t}_0)| < \varepsilon_0$ по п. 1 леммы об игольчатой вариации следовало, что график Γ_{x_η} лежит в ε-близости от графика $\Gamma_{\hat{x}}$.

Выберем ε_1 так, чтобы из $|z - \hat{z}| < \varepsilon_1$ следовали неравенства $|\bar{\alpha}|_1 < \varepsilon_0$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon_0$, $|x_0 - \hat{x}(\hat{t}_0)| < \varepsilon_0$. Тогда получается, что если $z = (t_1, \eta)$ будет допустимой точкой в $(з_{\bar{\tau}\bar{v}})$ такой, что $|z - \hat{z}| < \varepsilon_1$, то $F_0(z) \geqslant F_0(\hat{z})$. ▷▷

Б) Применение правила множителей Лагранжа к задаче $(з_{\bar{\tau}\bar{v}})$. В силу доказанной леммы и теоремы о правиле множителей Лагранжа для гладкой задачи с равенствами и неравенствами (п. 2.3.3) найдутся множители Лагранжа $\bar{\lambda}_0, \ldots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_N$, не все равные нулю ($\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(\bar{\tau}, \bar{v})$, $\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_i(\bar{\tau}, \bar{v})$) и такие, что для функции Лагранжа

$$\bar{\mathscr{L}} = \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i F_i(z) - \sum_{j=1}^{N} \bar{\mu}_j \alpha_j$$

выполнены условия стационарности ($\bar{\mathscr{L}}_z = 0$), неотрицательности ($\bar{\lambda}_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m'$, $\bar{\mu}_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, N$) и дополняющей нежесткости ($\bar{\lambda}_i F_i(\hat{z}) = 0$, $i = 1, \ldots, m'$).

Положим

$$\bar{f}(t, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i f_i(t, x, u),$$

$$\bar{l}(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i l_i(t_0, x_0, t_1, x_1),$$

$$\bar{p}(t) = \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i p_i(t),$$

где $p_i(\cdot)$ — решение системы

$$\dot{p}_i(t) + p_i(t)\hat{\varphi}_x(t) = \hat{f}_{ix}(t)$$

с краевым условием $p_i(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{ix_1}$. Из этих определений и определения для $\Omega(t, \hat{t}_0)$ следует, что

$$\dot{\bar{p}}(t) + \bar{p}(t)\hat{\varphi}_x(t) = \hat{\bar{f}}_x(t), \quad \bar{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\bar{l}}_{x_1}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{p}(t)\,\Omega(t,\hat{t}_0)\right)=\hat{\bar{f}}_x(t)\,\Omega(t,\hat{t}_0),$$

$$\bar{\mathscr{L}}=\int_{t_0}^{t_1}\bar{f}\left(t,x_\eta,u_{\bar{\alpha}}\right)dt+\bar{l}\left(t_0,x_0,t_1,x_\eta(t_1)\right)-\sum_1^N\bar{\mu}_j\alpha_j.$$

Распишем условия стационарности функции Лагранжа $\bar{\mathscr{L}}$ в точке $\hat{z}$, учитывая лемму о приращении функционала и формулы (2)—(5) предыдущего пункта:

$$\frac{\partial\bar{\mathscr{L}}(z)}{\partial\alpha_k}\bigg|_{z=\hat{z}}=\Delta\bar{f}(\tau_k,v_k)-\bar{p}(\tau_k)\,\Delta\varphi(\tau_k,v_k)-\bar{\mu}_k=0,$$

$$k=1,\ldots,N,\quad(2)$$

$$\frac{\partial\bar{\mathscr{L}}(z)}{\partial x_0}\bigg|_{z=\hat{z}}=\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\hat{\bar{f}}_x(t)\frac{\partial x_\eta(t)}{\partial x_0}\bigg|_{\eta=\hat{\eta}}dt+\hat{\bar{l}}_{x_0}+\hat{\bar{l}}_{x_1}\frac{\partial x_\eta(\hat{t}_1)}{\partial x_0}\bigg|_{\eta=\hat{\eta}}=$$

$$=\bar{p}(\hat{t}_1)\,\Omega(\hat{t}_1,\hat{t}_0)-\bar{p}(\hat{t}_0)+\hat{\bar{l}}_{x_0}+\hat{\bar{l}}_{x_1}\Omega(\hat{t}_1,\hat{t}_0)=$$

$$=-\bar{p}(\hat{t}_0)+\hat{\bar{l}}_{x_0}=0,\quad(3)$$

$$\frac{\partial\bar{\mathscr{L}}(z)}{\partial t_0}\bigg|_{z=\hat{z}}=-\hat{\bar{f}}(\hat{t}_0)+\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\hat{\bar{f}}_x(t)\,\frac{\partial x_\eta(t)}{\partial t_0}\bigg|_{\eta=\hat{\eta}}dt+\hat{\bar{l}}_{t_0}+$$

$$+\hat{\bar{l}}_{x_1}\frac{\partial x_\eta(\hat{t}_1)}{\partial t_0}\bigg|_{\eta=\hat{\eta}}=-\hat{\bar{f}}(\hat{t}_0)-\bar{p}(\hat{t}_1)\,\Omega(\hat{t}_1,\hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0)+$$

$$+\bar{p}(\hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0)+\hat{\bar{l}}_{t_0}-\hat{\bar{l}}_{x_1}\Omega(\hat{t}_1,\hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0)=$$

$$=-\hat{\bar{f}}(\hat{t}_0)+\bar{p}(\hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0)+\hat{\bar{l}}_{t_0}=0,\quad(4)$$

$$\frac{\partial\bar{\mathscr{L}}}{\partial t_1}\bigg|_{z=\hat{z}}=\hat{\bar{f}}(\hat{t}_1)+\hat{\bar{l}}_{t_1}+\hat{\bar{l}}_{x_1}\hat{\varphi}(\hat{t}_1)=$$

$$=\hat{\bar{f}}(\hat{t}_1)+\hat{\bar{l}}_{t_1}-\bar{p}(\hat{t}_1)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_1)=0.\quad(5)$$

Очевидно, что $\bar{\lambda}\neq 0$, ибо иначе из определений $\bar{f}$, $\bar{p}$ и соотношений (2) следовало бы, что $\bar{\mu}=0$, что невозможно. Умножением на положительную константу нормируем вектор $\bar{\lambda}$ так, чтобы $\sum\limits_0^m\bar{\lambda}_i^2=1$.

Итак, доказано, что существует единичный вектор $\bar{\lambda}$ такой, что выполнены соотношения (1)—(5) и, кроме того,

$$\bar{\lambda}_i F_i(\hat{z}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}_i \mathscr{B}_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m', \tag{6}$$

$$\bar{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m'. \tag{7}$$

В) Окончание доказательства. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{m+1}$ подмножества $K(\tau, v)$, $v \in \mathscr{U}$, $\tau \in T$, компактной сферы $\mathbf{S} = \left\{\lambda \,\middle|\, \sum_0^m \lambda_i^2 = 1\right\}$, состоящие из тех векторов λ, для которых выполняются утверждения а)—е) теоремы о принципе максимума Понтрягина, причем в п. 2 взято $t = \tau$, $u = v$. Из определения множества $K(\tau, v)$ нетрудно вывести, что они замкнуты. В силу условий (1)—(7) любое конечное пересечение множеств $K(\tau_k, v_k)$, $k = 1, \ldots, N$, непусто. По лемме о центрированной системе все множества $K(\tau, v)$ имеют непустое пересечение. Значит, существуют ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ и функция $p(\cdot) \in KC^1([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbf{R}^{n*})$ такие, что выполняются утверждения теоремы а) — е) с условием оптимальности, выполняющимся для любых $\tau \in T$, $v \in \mathscr{U}$.

Замечание. Принцип максимума доказан в пространстве

$$KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \times KC([t_0, t_1], \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2.$$

Незначительные изменения доказательства позволяют обосновать его в пространстве

$$W^1_\infty([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2.$$

10.1.7. Примеры.

Пример 1.

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_0^4 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \inf; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0.$$

Решение. 1. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, введя управление $u(\cdot)$:

$$\int_0^4 (u^2 + x)\, dt \to \inf; \ \dot{x} = u, \ u \in [-1, 1], \ x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^4 (\lambda_0 (u^2 + x) + p(\dot{x} - u))\, dt + \lambda x(0).$$

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера для лагранжиана $L=\lambda_0(u^2+x)+$ $+p(\dot{x}-u)$:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}+\widehat{L}_x=0\Leftrightarrow \dot{p}=\lambda_0;$$

б) трансверсальность по x:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_k)=(-1)^k\,\widehat{l}_{x(t_k)},\ k=0,1\Leftrightarrow p(0)=\lambda,\ p(4)=0;$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u\in[-1,1]}(\lambda_0u^2-pu)=\lambda_0\widehat{u}^2-p\widehat{u}.$$

3. Если $\lambda_0=0$, то из а) $\dot{p}=0$ и из б) $p=\lambda=0$ — все множители Лагранжа оказались нулями. Полагаем $\lambda_0=1$. Тогда из а) $\dot{p}=1$ и из б) $p=t-4$. Из условия в) следует, что

$$\widehat{u}=\begin{cases}\operatorname{sign}p, & |p/2|>1,\\ p/2, & |p/2|\leqslant 1,\end{cases}\Leftrightarrow \dot{\widehat{x}}=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<2,\\ (t-4)/2, & 2\leqslant t\leqslant 4.\end{cases}$$

Из начального условия находим непрерывную функцию

$$\widehat{x}(t)=\begin{cases}-t, & 0\leqslant t\leqslant 2,\\ t^2/4-2t+1, & 2\leqslant t\leqslant 4.\end{cases}$$

4. Здесь возможно несколько путей доказательства того, что $\widehat{x}\in\operatorname{abs\,min}$. Во-первых, можно сослаться на теорему существования из п. 10.3.5 и единственность критической точки. Во-вторых, можно сослаться на то, что наша задача выпуклая, а для задач выпуклого программирования необходимые условия минимума при $\lambda_0\neq 0$ являются достаточными (п. 4.1.3). Наконец, возможна непосредственная проверка. Проведем ее. Пусть $\widehat{x}(\cdot)+$ $+x(\cdot)$ — допустимая функция. Интегрируя по частям с использованием того, что $x(0)=0$ и $\dot{\widehat{x}}(t)=(t-4)/2$, $2\leqslant t\leqslant 4$, получим

$$\mathscr{B}(\widehat{x}(\cdot)+x(\cdot))=\int_0^4((\dot{\widehat{x}}+\dot{x})^2+\widehat{x}+x)\,dt=$$

$$=\mathscr{B}(\widehat{x}(\cdot))+\int_0^4\dot{x}^2\,dt+\int_0^4 2\dot{\widehat{x}}\dot{x}\,dt+\int_0^4 x\,d(t-4)=$$

$$= \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot)) + \int_0^4 \dot{x}^2 dt + \int_0^4 (2\dot{\hat{x}} - t + 4)\,\dot{x}\,dt =$$

$$= \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot)) + \int_0^4 \dot{x}^2 dt + \int_0^2 (2 - t)\,\dot{x}\,dt \geqslant \mathscr{B}(\hat{x}(\cdot)),$$

ибо на участке $[0, 2]$ $\dot{x} \geqslant 0$. Итак, $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

Пример 2.

$$T \to \inf;\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) = \xi_2,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0$$

(простейшая задача о быстродействии).

Решение. 1. Приведем задачу к виду задач оптимального управления п. 10.1.1, сделав замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ и вводя управление $u = \ddot{x}$:

$$T \to \inf;\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-1, 1],\ x_1(0) = \xi_1,$$
$$x_2(0) = \xi_2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$= \mathscr{L} \int_0^T (p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u))\,dt + \lambda_0 T +$$
$$+ \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T).$$

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера для лагранжиана $L = p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)$:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_i} + \hat{L}_{x_i} = 0,\ i = 1, 2 \Leftrightarrow \dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = -p_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_2(t) = Ct + C_1;$$

б) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T)$:

$$p_1(0) = \lambda_1,\ p_2(0) = \lambda_2,\ p_1(T) = -\lambda_3,\ p_2(T) = -\lambda_4;$$

в) оптимальность по u (не зависящие от u слагаемые не выписываем):

$$\min_{u \in [-1, 1]} (-p_2(t)u) = -p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow \hat{u}(t) = \operatorname{sign} p_2(t)$$
$$\text{при} \quad p_2(t) \neq 0;$$

г) стационарность по T:

$$\hat{\mathscr{L}}_T = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0.$$

Учитывая то, что

$$\dot{x}_1(T)=0,\quad \lambda_4=-p_2(T),\quad p_2(T)\hat{u}(T)=|p_2(T)|,$$

получаем $\hat{\mathscr{L}}_T=0 \Leftrightarrow \lambda_0=|p_2(T)|$.

3. Если $\lambda_0=0$, то из г) следует, что $p_2(T)=0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из а) $p_2(t)=C(t-T)$, а тогда из в) следует, что $\hat{u}(t)\equiv 1$ или $\hat{u}(t)\equiv -1$. Множество начальных условий, соответствующих таким управлениям, описывается уравнением

$$\xi_2=\varphi(\xi_1),\ \varphi(\xi_1)=\begin{cases}-\sqrt{2\xi_1}, & \xi_1\geqslant 0,\\ \sqrt{-2\xi_1}, & \xi_1\leqslant 0\end{cases}$$

$(\hat{u}(t)\equiv -1 \Rightarrow x_2(t)=T-t,\ x_1(t)=-(T-t)^2/2 \Rightarrow \xi_2^2/2= =\xi_1$; случай $\hat{u}\equiv 1$ аналогичен).

Если же $\xi_2\neq\varphi(\xi_1)$, то $\lambda_0\neq 0$, и мы полагаем $\lambda_0=1$. Тогда из г) вытекает, что $|p_2(T)|=1$, т. е. имеются две возможности:

$$p_2^+(t)=C(t-T)+1,\quad p_2^-(t)=C(t-T)-1.$$

Этим возможностям в силу в) соответствуют такие управления:

$$u^+(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<\tau,\\ 1, & \tau<t\leqslant T,\end{cases}\qquad u^-(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\tau,\\ -1, & \tau<t\leqslant T.\end{cases}$$

Рассмотрим траектории, соответствующие оптимальным управлениям u^+ и u^- на плоскости (x_1, x_2), называемой *фазовой плоскостью* (рис. 5).

Для тех значений t, для которых $\hat{u}(t)=1$, имеем

$$\dot{x}_2=1 \Rightarrow \dot{x}_1=x_2=t+C' \Rightarrow x_1=\frac{t^2}{2}+C't+C''=\frac{x_2^2}{2}+C.$$

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая этим значениям t, является куском параболы $x_1=x_2^2/2+C$. Направление движения по такой параболе определяется из условия возрастания x_2, так как в этом случае $\dot{x}_2=1$. Аналогично получаем, что для тех значений t, для которых $\hat{u}(t)=-1$, фазовая траектория — кусок параболы $x_1=-x_2^2/2+C$, а направление движения определяется из условия убывания x_2, так как $\dot{x}_2=-1$.

Укажем теперь то место на фазовой плоскости (x_1, x_2), где должно совершаться переключение управления. В искомую точку $(0, 0)$ $(x(T) = \dot{x}(T) = 0)$ мы должны попасть не более чем с одним переключением, двигаясь по фазовой траектории по разрешенному направлению. Совокупность начальных условий, соответствующих управлениям $u^+(\cdot)$ и $u^-(\cdot)$, описывается неравенствами $\xi_2 > \varphi(\xi_1)$ (для $u^+(\cdot)$) и $\xi_2 < \varphi(\xi_1)$ (для $u^-(\cdot)$) (см. рис. 5). Переключения совершаются на кривой $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. При этом, как нетрудно видеть, для каждого начального условия имеется единственная фазовая кривая, приводящая в точку $(0, 0)$.

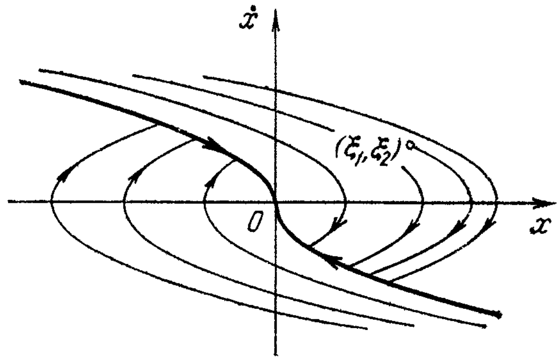

Рис. 5.

Поскольку всегда $|\dot{x}_2| = 1$ на оптимальной траектории, то $x_2 = |t| + C$ и, значит, время движения $\widehat{T} = \operatorname{Var} x_2$.

4. Покажем, что оптимальная траектория, начинающаяся в точке (ξ_1, ξ_2), доставляет решение задаче. Пусть этой траектории соответствует управление $\widehat{u}(\cdot)$ (для определенности $u^-(\cdot)$), функция $\widehat{x}(\cdot)$ и время $\widehat{T}$. Предположим, что имеется некоторый другой управляемый процесс $(x(\cdot),\ u(\cdot), T)$, $T \leqslant \widehat{T}$. Доопределим функцию $x(\cdot)$ нулем на отрезке $[T, \widehat{T}]$.

В силу условий на левом конце функции $\widehat{x}(\cdot)$ и $x(\cdot)$ в точке τ можно представить в виде

$$x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)\,\ddot{x}(s)\,ds + \xi_2\tau + \xi_1.$$

Поскольку $\ddot{\widehat{x}}(s) = 1 \geqslant \ddot{x}(s)\ \ \forall s \in [0, \tau)$, то

$$\widehat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)(1 - \ddot{x}(s))\,ds \geqslant 0,$$

причем равенство здесь возможно только, если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) \equiv 1$, а тогда $x(t) = \widehat{x}(t)\ \ \forall t \in [0, \tau]$.

Аналогично, с учетом условий на правом конце можно представить функции $\widehat{x}(\cdot)$ и $x(\cdot)$ в точке τ в виде

$$x(\tau)=\int_{\tau}^{\widehat{T}}(s-\tau)\ddot{x}(s)\,ds.$$

Так как $\ddot{x}(s)\geqslant -1=\ddot{\widehat{x}}(s)\ \ \forall s\in(\tau,\widehat{T})$, то

$$\widehat{x}(\tau)-x(\tau)=\int_{\tau}^{\widehat{T}}(s-\tau)(-1-\ddot{x}(s))\,ds\leqslant 0,$$

причем и здесь равенство возможно лишь, если $\ddot{x}(s)\equiv -1$ и $x(t)\equiv\widehat{x}(t)\ \ \forall t\in[\tau,\widehat{T}]$.

Таким образом, имеем, что $\widehat{x}(\tau)=x(\tau)$ и, следовательно, $\widehat{x}(t)\equiv x(t)\ \ \forall t\in[0,\widehat{T}]$. Отсюда $T=\widehat{T}$.

10.2. Принцип максимума и необходимые условия минимума в классическом вариационном исчислении. В этом пункте будет рассказано о необходимых условиях минимума для задач, изучавшихся в §§ 5—7. Все необходимые условия минимума будут выведены из принципа максимума.

10.2.1. Простейшая задача. Докажем необходимость в теореме 1 п. 5.5.1 и в дополнение к этому покажем, что *если $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче, то выполнено необходимое условие Вейерштрасса*

$$\mathscr{E}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t),u)\geqslant 0\quad \forall u\in\mathbf{R}^n,\quad \forall t\in[t_0,t_1].$$

(Определение функции Вейерштрасса было дано в п. 5.6.2.)

А) Условие Вейерштрасса для сильного минимума. Формализуем задачу (з) п. 5.5.1 как задачу оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,u)\,dt\to\inf;\quad \dot{x}=u,\quad x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1.\qquad (з')$$

Из условия, что $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет сильный минимум в (з) п. 5.5.1, следует, что пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, где $\widehat{u}(t)=\dot{\widehat{x}}(t)$, является оптимальным процессом в (з′). Согласно принципу максимума Понтрягина найдутся множители Лагранжа λ_0, λ_1, λ_2 и $p(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1],\mathbf{R}^n)$, не равные одновременно нулю и такие, что для функции Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 L(t, x, u) + \langle p(t), \dot{x} - u\rangle)\, dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1)$$

выполняются условия:

а) стационарности по x — уравнение Эйлера: $\dot{p} = \lambda_0 \widehat{L}_x(t)$;

б) трансверсальности по x: $p(t_0) = \lambda_1$, $p(t_1) = -\lambda_2$;

в) оптимальности по u:

$$\lambda_0 L(t, \widehat{x}(t), u) - \langle p(t), u\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_0 \widehat{L}(t) - \langle p(t), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle \ \forall u \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из в) вытекает, что $p \equiv 0$, а из б) — что все множители Лагранжа — нули. Значит, $\lambda_0 \neq 0$. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из в) следует, что $p(t) = \widehat{L}_{\dot{x}}(t)$, и условие в) с $\lambda_0 = 1$ и $p(t) = \widehat{L}_{\dot{x}}(t)$ оказывается не чем иным, как условием Вейерштрасса.

Б) Уравнение Эйлера и условие Лежандра. Поскольку $\widehat{x}(\cdot) \in \operatorname{loc\,min} з$, то для любой функции $x(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ функция $\varphi(\lambda) = \mathscr{I}(\widehat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot))$ имеет локальный минимум в нуле. Тогда по необходимому условию минимума функции одного переме́нного (п. 2.6.1) $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) \geqslant 0$. В п. 5.2.3 было показано, что первое условие равносильно выполнению уравнения Эйлера на функции $\widehat{x}(\cdot)$, а второе условие эквивалентно (п. 5.5.1) неотрицательности функционала

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle)\, dt$$
$$\forall x(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n),$$

где

$$A(t) = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t), \quad 2C(t) = \widehat{L}^*_{x\dot{x}}(t) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t),$$
$$B(t) = \widehat{L}_{xx}(t).$$

Неотрицательность $\mathscr{K}$ означает, что $\bar{x}(\cdot) \equiv 0$ доставляет абсолютный минимум в задаче

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) \to \inf; \quad x(t_0) = x(t_1) = 0 \qquad (з'')$$

в пространстве $C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$.

Поскольку в квадратичной задаче классического вариационного исчисления абсолютные минимумы в пространствах C^1 и KC^1 совпадают (ибо у кусочно-непрерывной функции можно «сгладить углы» — см. АТФ, с. 69), то $\bar{x}(\cdot)$ доставляет в (з″) и сильный минимум. Значит, в силу уже доказанного п. г) для задачи (з″) на экстремали $\bar{x}(\cdot)$ выполнено условие Вейерштрасса, которое в данном случае сводится к неравенству $\langle A(t)u, u\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{R}^n \Leftrightarrow A(t) \geqslant 0$. Утверждение б) доказано.

Пусть, наконец, условие Якоби не выполнено и существует $\tau \in [t_0, t_1]$ такое, что имеется нетривиальное решение $\bar{h}(\cdot)$ уравнения Якоби, для которого $\bar{h}(t_0) = \bar{h}(\tau) = 0$. Отметим, что из нетривиальности решения $\bar{h}(\cdot)$ однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с условием $\bar{h}(t_0) = 0$ вытекает: $\dot{\bar{h}}(t_0) \neq 0$. Положим

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \bar{h}(t), & t \in [t_0, \tau], \\ 0, & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Так как $\bar{h}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Якоби, то

$$\mathscr{K}(\tilde{h}(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau} \langle -(A\dot{\bar{h}} + C^*\bar{h})^{\boldsymbol{\cdot}} + C\dot{\bar{h}} + B\bar{h}, \bar{h}\rangle\, dt = 0.$$

Таким образом, $\mathscr{K}(\tilde{h}(\cdot)) = 0$, а это означает, что $\tilde{h}(\cdot)$ доставляет (наряду с функцией $\bar{x}(\cdot) \equiv 0$) сильный минимум в (з″).

И снова применяем принцип максимума (к экстремали $\tilde{h}(\cdot)$). Согласно принципу максимума найдется непрерывная вектор-функция $\tilde{p}(\cdot)$, для которой

$$\tilde{p}(t) = 2(A(t)\dot{\tilde{h}}(t) + C^*(t)\tilde{h}(t)).$$

Поскольку при $t > \tau$ $\tilde{h}(t) \equiv 0$, то $\tilde{p}(\tau) = 0$, откуда $A(\tau)\dot{\tilde{h}}(\tau) = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{h}}(\tau) = 0$ (ибо $A(\tau)$ обратима из-за усиленного условия Лежандра). То есть решение $\bar{h}(\cdot)$ уравнения Якоби обладает тем свойством, что $\bar{h}(\tau) = \dot{\bar{h}}(\tau) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \bar{h}(t) \equiv 0$. Мы пришли к противоречию, ибо $\dot{\bar{h}}(t_0) \neq 0$. Таким образом, условие Якоби выполнено.

Замечание. Отметим, при какой гладкости интегранта и экстремали могут быть выведены доказанные утверждения.

Уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса выводимы при предположениях: L и L_x непрерывны в $\mathscr{U}$, условия

Лежандра и Якоби — при допущении $L \in C^2(\mathscr{U})$, $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\cdot)$, $\hat{L}_{x\dot{x}}(\cdot)$ и $\hat{L}_{\dot{x}x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$. Все условия выполняются, если допустить, что $L \in C^3(\mathscr{U})$, $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$.

10.2.2. Задача Больца. *Пусть в задаче*

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\,dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf$$

интегрант $L: \mathscr{U} \to \mathbf{R}$ $(\mathscr{U} \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^{2n+1}))$ *и терминант* $l: \mathscr{V} \to \mathbf{R}$ $(\mathscr{V} \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^{2n}))$ *удовлетворяют следующему условию гладкости:* $L \in C^3(\mathscr{U})$, $l \in C^2(\mathscr{V})$. *Тогда, если* $\hat{x}(\cdot) \in \operatorname{loc\,min} з$, *то выполнены:*

а) *система уравнений Эйлера* $-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$ *и условия трансверсальности* $\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \hat{l}_{x(t_i)}$, $i = 0, 1$;

б) *условие Лежандра* $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0$;

в) *если имеет место усиленное условие Лежандра, то удовлетворяется условие Якоби, согласно которому в интервале* (t_0, t_1) *нет точек, сопряженных с* t_0;

г) *если удовлетворяются усиленные условия Лежандра и Якоби, то квадратичная форма* $P + Q$, *где*

$$Q(x_0, x_1) = l''(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))[(x_0, x_1)],$$

$$P(x_0, x_1) = \langle A(t_1)(\dot{H}_0(t_1)x_0 + \dot{H}_1(t_1)x_1), x_1\rangle - \\ - \langle A(t_0)(\dot{H}_0(t_0)x_0 + \dot{H}_1(t_0)x_1), x_0\rangle + \langle C^*(t_1)x_1, x_1\rangle - \\ - \langle C^*(t_0)x_0, x_0\rangle,$$

а $H_i(\cdot)$ — *решения уравнения Якоби с краевыми условиями* $H_i(t_j) = \delta_{ij}I$ (δ_{ij} — *символ Кронекера*), *должна быть неотрицательна.*

◁ Необходимость а) была установлена в п. 5.1, необходимость б) и в) немедленно следует из теоремы предыдущего пункта. Докажем г). По условию в (з) выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби.

Рассмотрим фундаментальную матрицу $\Phi(\cdot, t_0)$ решений уравнения Якоби, т. е. матрицу решений, удовлетворяющую условиям $\Phi(t_0, t_0) = 0$, $\dot{\Phi}(t_0, t_0) = I$. Вследствие того, что выполнено усиленное условие Якоби, матрица $\Phi(t, t_0)$ невырождена при $t \in (t_0, t_1]$. Положим $H_1(t) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_1, t_0)^{-1}$. Тогда $H_1(0) = 0$, $H_1(t_1) = I$. Аналогичным образом построим матрицу H_0: $H_0(t_0) = I$, $H_0(t_1) = 0$.

Тогда $x(t, x_0, x_1) = H_0(t)x_0 + H_1(t)x_1$ будет решением уравнения Якоби с краевыми условиями $x(t_i, x_0, x_1) = x_i$, $i = 0, 1$. Вычислим $\mathscr{K}(x(\cdot, x_0, x_1))$, где

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle)\, dt,$$

$$A = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t), \quad 2C = \widehat{L}^*_{\dot{x}x}(t) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t), \quad B = \widehat{L}_{xx}(t).$$

Имеем

$$\mathscr{K}(x(\cdot, x_0, x_1)) \overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \langle A\dot{x} + C^*x, d\dot{x}\rangle +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle Bx + C\dot{x}, \dot{x}\rangle\, dt = \langle A\dot{x} + C^*x, x\rangle \Big|_{t_0}^{t_1} = P(x_0, x_1).$$

В силу того, что для всякого $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ должно быть верно неравенство

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\mathscr{B}(\widehat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot))\big|_{\lambda=0} =$$

$$= \mathscr{K}(x(\cdot)) + Q(x(t_0), x(t_1)) = (P + Q)(x(t_0), x(t_1)) \geqslant 0,$$

приходим к г). ▷

10.2.3. Изопериметрическая задача. Докажем необходимость в теореме 1 п. 6.2.1. Формализуем задачу (з) п. 6.2.1 как задачу оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)\, dt \to \inf; \quad \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u)\, dt = \alpha_i, \tag{з$'$}$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{L}\, dt + \theta_0 x(t_0) + \theta_1 x(t_1),$$

где

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i, \quad \widetilde{L} = L + p(\dot{x} - u).$$

Выпишем необходимые условия минимума в соответствии с принципом максимума:

а) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{\overline{L}}_{\dot{x}}(t)+\widehat{\overline{L}}_{x}(t)=0; \tag{1}$$

б) условия трансверсальности:

$$p(t_0)=\theta_0, \quad p(t_1)=-\theta_1; \tag{2}$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u\in\mathbf{R}}(L(t,\widehat{x}(t),u)-pu)=\widehat{L}(t)-p\dot{\widehat{x}}. \tag{3}$$

Из (3) и теоремы Ферма следует, что

$$p(t)=\widehat{L}_{\dot{x}}(t). \tag{4}$$

Если допустить, что $\lambda_0=0$, то из (1) и (4) получим

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t)+\widehat{f}_{ix}(t)\right)=0,$$

т. е. линейную зависимость функций

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t)+\widehat{f}_{ix}(t), \quad i=1,\ldots,m.$$

Но в условиях теоремы была оговорена их линейная независимость, откуда $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,m$, и, значит, $p(t)\equiv\equiv 0\Rightarrow\theta_0=\theta_1=0$. Все множители Лагранжа оказались нулями, что противоречит утверждению принципа максимума. Значит, $\lambda_0\neq 0$ и можно считать, что $\lambda_0=1$.

Тогда (1) и (3) с учетом (4) приводят к уравнению Эйлера и условию Вейерштрасса для задачи (з) п. 6.2.1. Двукратное дифференцирование по u в (3) доказывает условие Лежандра. Осталось обосновать необходимость условия Якоби.

Применим теорему о необходимых условиях второго порядка для бесконечномерной задачи с равенствами (п. 2.6.3) к задаче (з) п. 6.2.1. В соответствии с этой теоремой из того, что $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет минимум в задаче (з) п. 6.2.1 в пространстве $C^1[t_0,t_1]$, следует, что численное значение вспомогательной задачи

$$\mathscr{K}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(A\dot{x}^2+2C\dot{x}x+Bx^2)\,dt\to\inf;$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(a_i(t)\dot{x}+b_i(t)x)\,dt=0, \quad x(t_0)=x(t_1)=0, \quad i=1,\ldots,m, \tag{з$_\text{в}$}$$

где $A = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}$, $B = \widehat{L}_{xx}$, $C = \widehat{L}_{\dot{x}x}$, $a_i = \widehat{f}_{i\dot{x}}$, $b_i = \widehat{f}_{ix}$, равно нулю.

Допустим теперь, что существуют такие точка $\tau \in (t_0, t_1)$, числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и функция $\bar{h}(\ )$, что

$$-\left(A\dot{\bar{h}} + C\bar{h}\right)^{\cdot} + C\dot{\bar{h}} + B\bar{h} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(-\dot{a}_i + b_i) = 0,$$

$$\int_{t_0}^{\tau} \left(a_i\dot{\bar{h}} + b_i\bar{h}\right) dt = 0, \quad \bar{h}(t_0) = \bar{h}(\tau) = 0.$$

Тогда функция $\tilde{h}$, равная $\bar{h}$ при $t \leqslant \tau$ и равная нулю при $t > \tau$, оказывается допустимой в задаче $(з_в)$ и при этом $\mathscr{K}(\tilde{h}) = 0$ (последнее получается, если произвести интегрирование по частям) Теперь следует применить принцип максимума к задаче $(з_в)$ и экстремали $\tilde{h}$ Тогда получим, что существуют такие функция $\tilde{p}(\ )$ и числа $\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_m$, что

$$-\dot{\tilde{p}} + C\dot{\tilde{h}} + B\tilde{h} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\nu}_i b_i = 0,$$

$$\tilde{p} = A\dot{\tilde{h}} + C\tilde{h} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\nu}_i a_i = 0.$$

Но тогда на $[\tau, t_1]$ $\sum_{i=1}^{m} \tilde{\nu}_i\left(-\dot{a}_i + b_i\right) = 0$, откуда вследствие требования теоремы о регулярности получаем, что $\tilde{\nu}_i = 0$, и далее приходим к противоречию, подобно тому, как это было проделано в п 10 2 1

10.2.4. Задача со старшими производными. Наметим план доказательства необходимости в теореме 1 п 7 2.1; рассуждения здесь подобны проведенным в трех предыдущих пунктах.

Формализуем задачу (з) п. 7 2 1 как задачу оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\, dt \to \inf; \qquad (з')$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \ldots, \ \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = u, \quad x_{i+1}(t_j) = x_{ij},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\lambda_0 f+\sum_{i=1}^{n-1} p_i(\dot{x}_i-x_{i+1})+p_n(\dot{x}_n-u)\right)dt+$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{1}\mu_{ij}x_{i+1}(t_j).$$

Выписав необходимые условия в соответствии с принципом максимума Понтрягина и убедившись в том, что λ_0 не может быть равным нулю, приходим к уравнению Эйлера — Пуассона и условию Вейерштрасса. Продифференцировав условие оптимальности по $u(\ )$ дважды по u, приходим к условию Лежандра. Далее следует рассмотреть квадратичную задачу

$$\mathscr{I}''(\hat{x}(\cdot))[x(\ ),x(\cdot)]\to\inf,\quad x^{(i)}(t_j)=0,$$
$$i=0,1,\ldots,n-1,\quad j=0,1. \qquad (з'')$$

Если допустить, что $\bar{x}(\cdot)\equiv 0\in\operatorname{abs\,min} з''$, но существует нетривиальное решение $\bar{h}(\cdot)$ уравнения Якоби (т. е. уравнения Эйлера — Пуассона задачи (з'')), обращающееся в нуль вместе со всеми производными до порядка $n-1$ в t_i, $i=0,1$, то можно показать, что функция $\tilde{h}(t)$, равная $\bar{h}(t)$ при $t\leqslant\tau$ и обращающаяся в нуль при $t\geqslant\tau$, является решением задачи (з''). Применение принципа максимума Понтрягина к задаче (з'') и экстремали $\tilde{h}(\cdot)$ приводит к противоречию, ибо $h^{(n)}(\ )$ в точке τ, с одной стороны, должна быть непрерывна, а с другой — разрывна.

10.3. Достаточные условия минимума в классическом вариационном исчислении. В этом пункте будет рассказано о достаточных условиях минимума для задач, изучавшихся в §§ 5—7. Эти условия выводятся на основе единой методологии, состоящей из построения поля, введения S-функции, вычисления ее дифференциала и вывода основной формулы Вейерштрасса.

10.3.1. Простейшая задача. ◁ Докажем достаточность в теореме 1 п. 5.5.1.

А) Построение центрального поля. Распишем уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})+L_x(t,x,\dot{x})=0\Leftrightarrow L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x})\ddot{x}+$$
$$+L_{x\dot{x}}(t,x,\dot{x})\dot{x}+L_{t\dot{x}}(t,x,\dot{x})-L_x(t,x,\dot{x})=0.$$

Так как выполнено усиленное условие Лежандра, т. е. неравенство $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \ \forall t \in [t_0, t_1]$, то в силу непрерывности функции $L_{\dot{x}\dot{\lambda}}$ (напомним, что $L \in C^4(\mathcal{U})$) найдется такое

$$\mathcal{U}_1 \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n+1}),\ \mathcal{U}_1 \subset V \times \mathbf{R}^n,$$
$$(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \in \mathcal{U}_1 \ \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

что $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) > 0 \ \forall (t, x, \dot{x}) \in \mathcal{U}_1$. Значит, в области $\mathcal{U}_1$ уравнение Эйлера равносильно системе, разрешенной относительно производных

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Phi(t, x, y),$$

где $\Phi(t, x, y) = L^{-1}_{\dot{\lambda}\dot{x}}(t, x, y)(L_x(t, x, y) - L_{t\dot{x}}(t, x, y) - L_{x\dot{x}}(t, x, y)\, y)$.

В силу предположенной гладкости интегранта функция Φ (дважды) непрерывно дифференцируема, и, значит, по локальной теореме существования (АТФ, с. 186) и глобальной теореме существования и непрерывной зависимости решения от начальных данных (АТФ, с. 195) найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

а) решение $\hat{x}(\ )$ продолжимо на отрезок $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$;

б) для любого $\lambda \in \mathbf{R}^n$ $(|\lambda| < \delta)$ на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$ определено решение $x(\ , \lambda)$ уравнения Эйлера с начальными данными $x(t_*) = \hat{x}(t_*)$, $\dot{x}(t_*) = \dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda$, где t_* — некоторая точка из интервала $(t_0 - \varepsilon, t_0)$.

По теореме о дифференцируемой зависимости от начальных данных (АТФ, с. 204), функция

$$(t, \lambda) \to x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), \ldots, x_n(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

непрерывно дифференцируема. Покажем, что экстремаль $\hat{x}(\ )$ окружена центральным полем экстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$ (определение этого термина см. в п. 5.6.1).

Дифференцируя функцию $\lambda \to x(t, \lambda)$ по λ, полагая $\lambda = 0$ и обозначая

$$x_\lambda(t, \lambda)|_{\lambda=0} = H(t, t_*)$$
$$\left(H_{ij}(t, t_*) = \left.\frac{\partial x_i(t, \lambda)}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda=0},\ i, j = 1, \ldots, n\right),$$

получаем (поскольку $t \to x(t, \lambda)$ — это экстремаль для любого λ, $|\lambda| < \delta$)

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda)) + \right.$$

$$\left. + L_x(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda))\right)\Big|_{\lambda=0} \Rightarrow -\frac{d}{dt}(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{H}(t, t_*) +$$

$$+ \widehat{L}_{\dot{x}x}(t) H(t, t_*)) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{H}(t, t_*) + \widehat{L}_{xx}(t) H(t, t_*) = 0.$$

Получилось, что матрица $H(\cdot, t_*)$ удовлетворяет уравнению Якоби. При этом выполнены следующие начальные условия:

$$H(t_*, t_*) = \frac{\partial}{\partial\lambda} x(t_*, \lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\widehat{x}(t_*) = 0,$$

$$\dot{H}(t_*, t_*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{x}(t_*, \lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\dot{\widehat{x}}(t_*) + \lambda) = I.$$

Пусть $H(t, t_0)$ — матричное решение уравнения Якоби с условиями $H(t_0, t_0) = 0$, $\dot{H}(t_0, t_0) = I$. Поскольку выполнено усиленное условие Якоби, то не существует нетривиального решения h уравнения Якоби, удовлетворяющего условиям $h(t_0) = h(\tau) = 0$, $t_0 < \tau \leqslant t_1$ (п. 5.5.1). Таким образом, усиленное условие Якоби равносильно невырожденности матрицы $H(t, t_0)$ при любом $t \in (t_0, t_1]$. Но тогда снова в силу глобальной теоремы существования и непрерывной зависимости решения от начальных данных (АТФ, с. 195) (для уравнения Якоби, которое тоже, очевидно, сводится к разрешенной системе первого порядка) при достаточной близости t_1 к t_0 матрица $H(t, t_*)$ будет невырожденной для любого $t \in [t_0, t_1]$.

Рассмотрим отображение $\Psi(t, \lambda) = (t, x(t, \lambda))$ в некоторой точке $(\bar{t}, 0)$, $\bar{t} \in [t_0, t_1]$. Имеем

$$\det \Psi'(\bar{t}, 0) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_t(\bar{t}, 0) & x_\lambda(\bar{t}, 0)\end{bmatrix} = \det H(\bar{t}, t_*) \neq 0.$$

Значит, по теореме об обратной функции найдется такое $\delta = \delta(\bar{t}) > 0$, что если только $|\bar{t} - \tau| < \delta$, $|\xi - \widehat{x}(t)| < \delta$, то существует единственное $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$ такое, что

$$\Psi(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = (\tau, \xi) \Leftrightarrow x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi.$$

В силу компактности графика $\Gamma_{\widehat{x}} = \{(t, x(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$ можно найти одно δ_0 такое, что для любой точки (τ, ξ), $|\xi - \widehat{x}(\tau)| < \delta_0$, существует (и как нетрудно понять — единственное) $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$, при котором $x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi$. При этом гладкость функции λ такая же, как гладкость x, т. е. C^2. Построение центрального поля, окружающего экстремаль, закончено. Остается положить $u(\tau, \xi) = \frac{d}{dt} x(t, \lambda(\tau, \xi))|_{t=\tau}$.

Б) S-функция и ее дифференциал. Положим

$$S(\tau, \xi) = \int_{t_*}^{\tau} L(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)))\, dt.$$

Функция $(\tau, \xi) \to S(\tau, \xi)$ называется *S-функцией.* Вычислим ее дифференциал. Имеем по определению

$$x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi, \tag{1}$$

$$\dot{x}(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = u(\tau, \xi). \tag{2}$$

Дифференцируя под знаком интеграла, используя непрерывность $\dot{x}_\lambda$, вытекающую из того, что $x \in C^2$, получим

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \int_{t_*}^{\tau} \langle L_x(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi))),\; x_\lambda(t, \lambda(\tau, \xi))\, \lambda_\xi(\tau, \xi)\rangle\, dt +$$
$$+ \int_{t_*}^{\tau} \langle L_{\dot{x}}(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi))),\; \dot{x}_\lambda(t, \lambda(\tau, \xi))\, \lambda_\xi(\tau, \xi)\rangle\, dt.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям (используя (2), то, что $x(\cdot, \lambda)$ есть экстремаль, а также то, что $x_\lambda(t_*, \lambda(\tau, \xi)) = 0$), получим

$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi} = \langle L_{\dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), x_\lambda(\tau, \lambda(\tau, \xi))\, \lambda_\xi(\tau, \xi)\rangle.$$

Но из (1) следует равенство $x_\lambda(\tau, \lambda(\tau, \xi))\lambda_\xi(\tau, \xi) = I$, откуда окончательно имеем

$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi} = L_{\dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) \overset{\text{def}}{=} p(\tau, \xi).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \tau} = L(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) + \int_{t_*}^{\tau} (\langle L_x(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)),$$
$$\dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi))), x_\lambda(\tau, \lambda(\tau, \xi))\, \lambda_\tau(\tau, \xi)\rangle +$$

$$+\langle L_{\dot x}(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot x(t, \lambda(\tau, \xi))),$$

$$\dot x_\lambda(t, \lambda(\tau, \xi))\lambda_\tau(\tau, \xi)\rangle)\,dt =$$

$$= L(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \langle L_{\dot x}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), u(\tau, \xi)\rangle \overset{\text{def}}{=} -H(\tau, \xi).$$

Здесь после интегрирования по частям с учетом (2) следует принять во внимание тождество $\dot x_\tau(\tau, \lambda(\tau, \xi)) + \dot x_\lambda(\tau, \lambda(\tau, \xi))\lambda_\tau(\tau, \xi) = 0$. Итак,

$$dS(\tau, \xi) = \langle p(\tau, \xi), d\xi\rangle - H(\tau, \xi)d\tau.$$

В) Основная формула Вейерштрасса. Пусть $\mathcal{U}_2$ — односвязная окрестность графика экстремали $\widehat{x}(\cdot)$, покрытая центральным полем экстремалей $x(\cdot, \lambda)$, и $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ — любая функция, график которой расположен в этой окрестности; при этом $x(t_0) = \widehat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \widehat{x}(t_1)$. Тогда

$$S(t_1, x_1) - S(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dS(t, \widehat{x}(t)) \overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (-H(t, \widehat{x}(t)) + \langle p(t, \widehat{x}(t)), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle)\,dt \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) - \langle L_{\dot x}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle +$$

$$+ \langle L_{\dot x}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)), \dot{\widehat{x}}(t)\rangle)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))dt = \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)).$$

Отсюда

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot x(t))\,dt - \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (L(t, x(t), \dot x(t)) - L(t, x(t), u(t, x(t))) -$$

$$- \langle L_{\dot x}(t, x(t), u(t, x(t))), \dot x(t) - u(t, x(t))\rangle)\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot x(t))dt.$$

Эту формулу называют *основной формулой Вейерштрасса.*

Г) Достаточные условия. Из квазирегулярности интегранта следует, что если $(t, x) \in V$, то $\mathscr{E}(t, x, u, \dot{x}) \geqslant \geqslant 0 \quad \forall (u, \dot{x}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Если теперь выбрать $\mathscr{U}_2$ лежащей внутри V, то из формулы Вейерштрасса немедленно последует, что для любой функции $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, график которой лежит в $\mathscr{U}_2$, $\mathscr{I}(x(\cdot)) \geqslant \mathscr{I}(\widehat{x}(\cdot))$, т. е. $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет сильный минимум.

Докажем теорему 2, т. е. исследуем задачу

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle)\, dt \to \inf;$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{з$'$}$$

А) Пусть не выполнено условие Якоби. Тогда по теореме 1 и лемме о скруглении углов (АТФ, с. 69) существует функция $\xi(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$, для которой $\mathscr{K}(\xi(\cdot)) < 0$. Но тогда $\mathscr{K}(\alpha\xi(\cdot)) \to -\infty$ при $\alpha \to +\infty$, т. е. $S_{\min} = -\infty$.

Б) Пусть выполнено усиленное условие Якоби и $H(t, \tau)$ — матричное решение уравнения Эйлера задачи

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) \to \inf; \quad x(t_0) = x(t_1) = 0,$$

удовлетворяющее условиям $H(\tau, \tau) = 0$, $\dot{H}(\tau, \tau) = I$. Из усиленного условия Якоби вытекает, что матрицы $H(t, t_0)$ и $H(t, t_1)$ невырождены для $t \in (t_0, t_1]$ и $[t_0, t_1)$ соответственно. Положим

$$H_1(t) = H(t, t_0)H^{-1}(t_1, t_0), \quad H_0(t) = H(t, t_1)H^{-1}(t_0, t_1).$$

Тогда $H_i(t_j) = \delta_{ij}I$, $i, j = 0, 1$, и, значит, $\widehat{x}(t) = H_0(t)x_0 + H_1(t)x_1$ — допустимая экстремаль в (з$'$). Эта экстремаль единственна, ибо если бы $\bar{x}(\cdot)$ была другой допустимой экстремалью, то $y = x - \bar{x}$ было бы нетривиальным решением уравнения Якоби с условиями $y(t_0) = y(t_1) = 0$, а это противоречит усиленному условию Якоби.

Пусть теперь $x(\cdot)$ — любая функция из $KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, $x(t_0) = x(t_1) = 0$. Поскольку $\widehat{x}(\cdot)$ — экстремаль, то нетрудно вывести, что

$$\mathscr{K}(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot)) = \mathscr{K}(\widehat{x}(\cdot)) + \mathscr{K}(x(\cdot)).$$

Семейство функций $x(\cdot, \lambda) = H(\cdot, t_*)\lambda$, где t_* настолько близко к t_0, что матрица $H(t, t_*)$ невырождена при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (см. доказательство теоремы 1), есть поле, покрывающее всю полосу $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Функция наклона этого поля:

$$u(t, x) = \dot{H}(t, t_*) H^{-1}(t, t_*) x.$$

Отсюда по формуле Вейерштрасса (см. п. В) доказательства теоремы 1)

$$\mathscr{K}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \langle A(t)(\dot{x} - \dot{H}(t, t_*) H^{-1}(t, t_*) x), \dot{x} - \\ - \dot{H}(t, t_*) H^{-1}(t, t_*) x\rangle \, dt \geqslant 0,$$

ибо $A(t) > 0$ по условию. Значит, $\mathscr{K}(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot)) \geqslant \geqslant \mathscr{K}(\widehat{x}(\cdot))$. $\triangleright$

Далее (для задачи Больца, изопериметрической задачи и задачи со старшими производными) мы не приводим всех рассуждений детально, а указываем лишь на существенные новые моменты.

10.3.2. Задача Больца. Докажем достаточность в теореме 1 п. 5.5.2. Из условий теоремы, подобно тому, как это было проделано при доказательстве теоремы 1 п. 5.5.1, показывается, что существуют малые окрестности V_0 и V_1 точек $\widehat{x}(t_0)$ и $\widehat{x}(t_1)$ такие, что для любых $\xi_0 \in V_0$, $\xi_1 \in V_1$ существует единственное решение уравнения Эйлера $x(\cdot, \xi_1, \xi_2)$, для которого $x(t_i, \xi_0, \xi_1) = \xi_i$, $i = 0, 1$.

Тогда, если график $x(\cdot)$ лежит в малой окрестности графика $\widehat{x}(\cdot)$, то

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \mathscr{I}(x(\cdot)) + l(x(t_0), x(t_1)) = \mathscr{I}(x(\cdot)) - \\ - \mathscr{I}(x(\cdot, x(t_0), x(t_1))) + \mathscr{I}(x(\cdot, x(t_0), x(t_1))) + \\ + l(x(t_0), x(t_1)) = \mathscr{I}(x(\cdot)) - \mathscr{I}(x(\cdot, x(t_0), x(t_1))) + \\ + \Phi(x(t_0), x(t_1)), \qquad (1)$$

где

$$\Phi(\xi_0, \xi_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t, \xi_0, \xi_1), \dot{x}(t, \xi_0, \xi_1)) dt + l(\xi_0, \xi).$$

Производя дифференцирование под знаком интеграла в этой формуле, затем интегрируя по частям с использованием того, что $\{x(\cdot, \xi_0, \xi_1)\}$ — это семейство решений уравнения Эйлера, и, наконец, повторно дифференцируя, получим

$$\Phi''(0,\ 0)[x_0,\ x_1] = (P+Q)[x_0,\ x_1].$$

Теперь следует воспользоваться тем, что по формуле Вейерштрасса

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(x(\cdot,\ x(t_0),\ x(t_1))) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\, dt \geqslant 0.$$

Вследствие положительной определенности $P+Q$, если $(x(t_0),\ x(t_1))$ лежит в малой окрестности $(\hat{x}(t_0),\ \hat{x}(t_1))$, то $\Phi(x(t_0),\ x(t_1)) \geqslant \Phi(\hat{x}(t_0),\ \hat{x}(t_1))$ и мы приходим к тому, что требовалось:

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1],\mathbf{R}^n)} < \delta \Rightarrow \mathcal{B}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{B}(\hat{x}(\cdot)).$$

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 2 п. 5.5.1.

10.3.3. Изопериметрическая задача. Докажем достаточность в теореме 1 п. 6.2.1. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ — экстремаль задачи (з) п. 6.2.1 и $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1,\ \ldots,\ \hat{\mu}_m)$ — соответствующие множители Лагранжа. Обозначим $f = (f_1,\ \ldots,\ f_m)$.

А) Построение центрального поля. Распишем уравнение Эйлера для лагранжиана $L(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu) = f_0(t,\ x,\ \dot{x}) + \langle \mu,\ f(t,\ x,\ \dot{x})\rangle$ в виде системы

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}, \mu) + L_x(t, x, \dot{x}, \mu) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = y,\ \dot{y} = \Phi(t, x, y, \mu), \qquad (1)$$

$$\Phi(t, x, y, \mu) = L^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, y, \mu)\,(L_x(t, x, y, \mu) - - L_{\dot{x}t}(t, x, y, \mu) - L_{\dot{x}x}(t, x, y, \mu)\, y).$$

Так можно сделать в некоторой окрестности графика экстремали $\hat{x}$ при μ, достаточно близких к $\hat{\mu}$, вследствие выполнимости усиленного условия Лежандра.

По теоремам из теории дифференциальных уравнений (локальной теореме существования, теоремам о непрерывной и непрерывно дифференцируемой зависимости от начальных данных и параметров) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любых λ, μ таких, что $|\lambda| < \varepsilon$, $|\mu - \hat{\mu}| < \varepsilon$, решение $x(\cdot,\ \lambda,\ \mu)$ уравнения Эйлера (1) с начальными данными $x(t_*, \lambda, \mu) = \hat{x}(t_*)$, $\dot{x}(t_*, \lambda, \mu) = \dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda$ будет определено на $[t_0,\ t_1]$ при t_*, близком к t_0, $t_* < t_0$.

Положим

$$y(\tau, \lambda, \mu) = (y_1(\tau, \lambda, \mu), \ldots, y_m(\tau, \lambda, \mu)),$$

$$y_i(\tau, \lambda, \mu) = \int\limits_{t_*}^{\tau} f_i(t, x(t, \lambda, \mu), \dot{x}(t, \lambda, \mu))\, dt, \ i = 1, \ldots, m.$$

Из усиленного условия Якоби выводится (проверить это!), что найдется такое $\delta > 0$, что если только $\tau \in [t_0, t_1]$, $|\xi - \hat{x}(\tau)| < \delta$, $|\eta - \eta(\hat{\tau})| < \delta$, то существуют единственные $\lambda = \lambda(\tau, \xi, \eta)$, $\mu = \mu(\tau, \xi, \eta)$ такие, что

$$x(\tau, \lambda(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)) = \xi,$$
$$y(\tau, \lambda(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)) = \eta$$

и при этом функции λ и μ обладают нужной гладкостью. Этим заканчивается построение поля. Функция

$$u(\tau, \xi, \eta) = \frac{d}{dt} x(t, \lambda(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta))\,|_{t=\tau}$$

называется *функцией наклона поля* $x(\cdot, \lambda, \mu)$.

Б) S-функция и ее дифференциал. Положим

$$S(\tau, \xi, \eta) = \int\limits_{t_*}^{\tau} f_0(t, x(t, \lambda, \mu), \quad \dot{x}(t, \lambda, \mu))\, dt,$$
$$\lambda = \lambda(\tau, \xi, \eta), \quad \mu = \mu(\tau, \xi, \eta).$$

Имеем по определению

$$S(\tau, \xi, \eta) + \langle \mu(\tau, \xi, \eta), \eta \rangle = \int\limits_{t_*}^{\tau} L(t, x(t, \lambda, \mu), \ \dot{x}(t, \lambda, \mu), \mu)\, dt,$$
$$\lambda = \lambda(\tau, \xi, \eta), \quad \mu = \mu(\tau, \xi, \eta).$$

Дифференцируя по ξ и применяя выкладки, подобные проведенным в предыдущем пункте, получим

$$\frac{\partial S(\tau, \xi, \eta)}{\partial \xi} + \left\langle \frac{\partial \mu(\tau, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \eta \right\rangle =$$
$$= L_{\dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)) + \left\langle \frac{\partial \mu(\tau, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \eta \right\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial S(\tau, \xi, \eta)}{\partial \xi} = L_{\dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial S(\tau, \xi, \eta)}{\partial \tau} = L(\tau, \xi, u(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)) - \\ - L_{\dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta))\, u(\tau, \xi, \eta).$$

Наконец,

$$\frac{\partial S(\tau, \xi, \eta)}{\partial \eta} = -\mu(\tau, \xi, \eta).$$

В) Основная формула Вейерштрасса. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $y_i(t) = \int_{t_0}^{t} f_i(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds.$ Тогда, если $y_i(t_1) = \alpha_i$, $x(t_j) = x_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1$, то

$$S(t_1, x_1, \alpha) - S(t_0, x_0, 0) = \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t), y(t))$$

и, следовательно,

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), y(t), u(t, x(t), y(t)), \dot{x}(t))\, dt,$$

где

$$x(t_j) = \widehat{x}(t_j) = x_j, \quad j = 0, 1,$$

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds, \quad y_i(t_1) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\mathcal{E}(t, x, y, u, \dot{x}) = L(t, x, \dot{x}, \mu(t, x, y)) - \\ - L(t, x, u, \mu(t, x, y)) - (\dot{x} - u) L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}, \mu(t, x, y)),$$

$$L(t, x, \dot{x}, \mu) = f_0(t, x, \dot{x}) + \langle \mu, f(t, x, \dot{x}) \rangle.$$

Г) Достаточное условие в теореме 1 п. 6.2.1 немедленно следует из квазирегулярности интегранта.

Теорема 2 доказывается подобно теореме 2 п. 5.5.1.

10.3.4. Задача со старшими производными. Докажем достаточность в теореме 1 п. 7.2.1.

А) Построение центрального поля. Расписывая уравнение Эйлера — Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f_{x^{(k)}}\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0$$

и используя усиленное условие Лежандра, сводим его к уравнению $2n$-го порядка, разрешенному относительно старшей производной. Это дает возможность построить n-параметрическое семейство $x(t, \lambda) = x(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ функций, удовлетворяющих уравнению Эйлера — Пуассона и краевым условиям

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t_*, \lambda) &= \widehat{x}^{(k)}(t_*), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ x^{(k)}(t_*, \lambda) &= \widehat{x}^{(k)}(t_*) + \lambda_{k-n+1}, \quad k = n, \ldots, 2n-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Продифференцируем функцию $\lambda \to x(t, \lambda)$ по λ в точке $\lambda = 0$ и обозначим

$$x_\lambda(t, \lambda)\big|_{\lambda=0} = h(t, t_*) \quad \left(h_m(t, t_*) = \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda_m}\bigg|_{\lambda=0}\right)$$

Рассмотрим матрицу

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t, t_*) & \ldots & h_n(t, t_*) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_1^{(n-1)}(t, t_*) & \ldots & h_n^{(n-1)}(t, t_*) \end{bmatrix}.$$

Тогда из условий (1) получим, что $H(t_*) = 0$, $H^{(n)}(t_*) \doteq I$. Из усиленного условия Якоби следует, что при t_*, близком к t_0, $t_* < t_0$, матрица $H(t)$ невырождена $\forall t \in [t_0, t_1]$. Это дает возможность найти экстремаль, для которой

$$x^{(k)}(\tau, \lambda) = \xi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

причем по (τ, ξ), $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$, где $|\xi_i - \widehat{x}^{(i)}(\tau)| < \delta$, величина $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$ определяется однозначно. На этом заканчивается построение поля. Остается положить

$$u(\tau, \xi) = \frac{d^n}{dt^n} x(t, \lambda(\tau, \xi))\big|_{t=\tau}.$$

Б) S-функция и ее дифференциал. Положим

$$S(\tau, \xi) = \int_{t_*}^{\tau} f(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)), \ldots$$
$$\ldots, x^{(n)}(t, \lambda(\tau, \xi)))\, dt.$$

Дифференцируя под знаком интеграла, приходим к формулам ·

$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi_k} = p_k(\tau, \xi), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \tau} = -H(\tau, \xi),$$

где

$$p_k(\tau, \xi) =$$
$$= f_{x^{(k)}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \frac{d}{dt} f_{x^{(k+1)}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi))\,|_{t=\tau} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-k} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-k} f_{x^{(n)}}(t, \xi, u(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau},$$
$$-H(\tau, \xi) = f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\tau, \xi)\, \xi_k.$$

В) Основная формула Вейерштрасса. Она приобретает вид

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots$$
$$\ldots, x^{(n-1)}(t), u\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big), x^{(n)}(t)\big)\, dt,$$

где

$$\mathcal{E}(t, \bar{x}, u, \dot{x}) = f(t, \bar{x}, \dot{x}) - f(t, \bar{x}, u) - (\dot{x} - u) f_{x^{(n)}}(t, \bar{x}, u),$$
$$\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Г) Достаточное условие. В теореме 1 п. 7.2.1 оно немедленно следует из квазирегулярности интегранта. ▷

Теорема 2 доказывается, как и теорема 2 п. 5.5.1.

10.3.5. Об одной теореме существования. Оптимальное управление предоставляет новые возможности для исследования классических задач. Продемонстрируем это на примере простейшей задачи

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \to \inf; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{з}$$

с дополнительным ограничением $|\dot{x}| \leqslant A$.

Теорема. *Пусть в* (з) *интегрант* L *определен и непрерывен в* $\mathbf{R}^{2n+1}$, *квазирегулярен в* $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^n$. *Тогда, если существует допустимая функция, то решение задачи* (з) *существует (решением будет функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой* A).

$\lhd$ Пусть $\{x_n(\cdot)\}_{n \geqslant 1}$ — минимизирующая последовательность. Из условий $x_n(t_0) = x_0$, $|\dot{x}| \leqslant A$ вытекает компактность $\{x_n(\cdot)\}_{n \geqslant 1}$ в пространстве $C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$. Значит, можно считать, что $x_n(\cdot)$ равномерно сходится к $\widehat{x}(\cdot)$. При этом $\widehat{x}(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Используя то, что L — выпуклая по $\dot{x}$ функция, и слабую сходимость $\dot{x}_n(\cdot)$ к $\dot{\widehat{x}}(\cdot)$, легко выводится, что

$$\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot)) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \mathcal{J}(x_n(\cdot)),$$

т. е. что $\widehat{x}(\ )$ — решение задачи. $\rhd$

Эта простая теорема зачастую позволяет полностью исследовать простейшую задачу классического вариационного исчисления, минуя теорию достаточных условий. Поясним это. В п. 5.5 было рассказано, что с теоретической точки зрения можно считать интегрант квазирегулярным. Если интегрант квазирегулярен, то можно наложить «принудительное» ограничение $|\dot{x}| \leqslant A$. Тогда по теореме существования решение задачи (з) (при достаточно большом A) существует. Значит, можно применять принцип максимума Понтрягина. Как правило, этот принцип выделяет конечное число решений $x_1(\cdot, A), \ldots$ $\ldots, x_s(\cdot, A)$. Среди них отбираем то, для которого функционал $\mathcal{J}$ минимален. Пусть $x_1(\cdot, A)$ и будет этим решением. Далее следует изучить поведение величины $\varphi(A) = \mathcal{J}(x_1(\cdot, A))$. Если $\varphi(A) \to -\infty$ при $A \to +\infty$, то $S_{\min} = -\infty$. Если же φ ограничена снизу, то следует рассмотреть $\lim\limits_{A \to +\infty} x_1(\cdot, A) = \widehat{x}(\ )$ (такие пределы обычно существуют), и мы приходим к решению задачи. Этим приемом мы пользуемся при решении задач.

10.1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin t \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(\pm\pi) = 0.$

10.2. $\int\limits_{0}^{7\pi/4} x \sin t \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0.$

10.3. (P) $\int\limits_{0}^{T_0} |\dot{x}| \, dt \to \inf;$

$$\dot{x} \geqslant A, \ x(0) = 0, \ x(T_0) = \xi \quad (A < 0).$$

10.4. $\int\limits_{0}^{4} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(4) = 0.$

10.5. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0.$

10.6. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = \xi.$

10.7. $\int\limits_{0}^{T} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = \xi.$

10.8. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(T_0) = \xi.$

10.9. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr};$

$$|\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0, \ x(T_0) = 0.$$

10.10. $\int\limits_{0}^{T} (\dot{x}^2 + x) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0, \ x(T) = \xi.$

10.11. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) \, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = \xi.$

10.12. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr}; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

10.13. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr}; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

10.14. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr}; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) = \dot{x}(1) = 0.$

10.15. $\int_0^2 x\,dt \to \text{extr}; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) + x(2) = 0, \ \dot{x}(2) = 0.$

10.16. $\int_0^2 x\,dt \to \text{extr}; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) + x(2) = 0, \ \dot{x}(0) = 0.$

10.17. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr};$

$$|\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) + x(1) = 0, \ \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 0.$$

10.18. $\int_0^2 x\,dt \to \text{extr}; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) = \dot{x}(0) = x(2) = 0.$

10.19. $\int_0^2 x\,dt \to \text{extr}, \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = x(2) = 0.$

10.20. (P) $\int_0^2 x\,dt \to \inf; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$

10.21. $\int_0^4 x\,dt \to \text{extr};$

$$|\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(0) + x(4) = 0, \ \dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 0.$$

10.22. $T \to \inf; \ |\dot{x}| \leqslant 2, \ x(-1) = 1, \ x(T) = -1,$

$\dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0.$

10.23. $T \to \inf; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(-1) = -1, \ x(T) = 1,$

$\dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0.$

10.24. $T \to \inf; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0,$

$x(0) = 1, \ x(T) = 3.$

10.25. $T \to \inf; \ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3, \ x(0) = 1,$

$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \ x(T) = -1.$

10.26. $T \to \inf; \ -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \ x(0) = 3,$

$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \ x(T) = -5.$

10.27. $T \to \inf; \ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \ x(0) = \xi_1,$

$\dot{x}(0) = \xi_2, \ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

10.28. $T \to \inf; \ |\ddot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = \xi_1, \ \dot{x}(0) = \xi_2, \ \dot{x}(T) = 0.$

10.29. $T \to \inf; \ |x| \leqslant 1, \ x(0) = \xi_1, \ \dot{x}(0) = \xi_2, \ x(T) = 0.$

10.30. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \inf;$

$\ddot{x} \geqslant -2, \ x(0) = 0, \ x(2) = -1, \ \dot{x}(2) = -2.$

10.31. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \inf;$

$\ddot{x} \geqslant -2, \ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ x(2) = -3.$

10.32. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \inf;$

$\ddot{x} \geqslant -2, \ x(0) = \dot{x}(2) = 0, \ x(2) = 3.$

10.33. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \inf;$

$\ddot{x} \leqslant 2, \ x(0) = 0, \ x(2) = 1, \ \dot{x}(2) = 2.$

10.34. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\, dt \to \inf;$

$\ddot{x} \leqslant 2, \ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = -2, \ x(2) = 0.$

10.35. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \inf;$

$$\ddot{x} \leqslant 24, \ x(0) = 11, \ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$$

10.36. $\int_0^2 \ddot{x}^2 dt \to \inf; \ \ddot{x} \geqslant 6, \ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ x(2) = 17.$

10.37. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \inf;$

$$|\ddot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ x(1) = -\frac{11}{24}.$$

10.38. $x(2) \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 2, \ \int_0^2 \dot{x}^2 dt = 2, \ x(0) = 0.$

10.39. $x(T_0) \to \text{extr}; \int_0^{T_0} \dot{x}^2 dt = 2, |\dot{x}| \leqslant 1, x(0) = 0.$

10.40. (P) $\int_0^1 \left(\frac{x^2 + \dot{x}^2}{2} + |\dot{x}| \right) dt \to \text{extr}; \ x(1) = \xi.$

10.41. $\int_0^{T_0} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \to \sup;$

$$x(0) = x(T_0), \ y(0) = y(T_0), \ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \leqslant 1.$$

10.42. $\int_0^{T_0} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \to \sup;$

$$(\dot{x} - \xi)^2 + \dot{y}^2 \leqslant 1, \ x(0) = x(T_0), \ y(0) = y(T_0).$$

10.43. $\int_0^{T_0} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \to \sup;$

$$\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{b}\right)^2 \leqslant 1, \quad x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0).$$

10.44. $\int\limits_0^{T_0} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \to \sup;$

$|\dot{x}| \leqslant 1, \ |\dot{y}| \leqslant 1, \ x(0) = x(T_0), \ y(0) = y(T_0).$

10.45. $\int\limits_0^{T_0} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \to \sup;$

$|\dot{x}| + |\dot{y}| \leqslant 1, \ x(0) = x(T_0), \ y(0) = y(T_0).$

10.46. $\int\limits_0^{T_0} \frac{t\, dt}{1 + \dot{x}^2} \to \inf; \ \dot{x} \geqslant 0, \ x(0) = 0, \ x(T_0) = \xi$

(аэродинамическая задача Ньютона).

10.47. $\int\limits_0^{1} x^2 dt \to \sup; \ \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0$

(найти допустимые экстремали).

Глава IV

СВОДНЫЙ ОТДЕЛ И ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 11. СВОДНЫЙ ОТДЕЛ

11.1. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ x(1) = 1.$

11.2. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)\, dt - \frac{x^2(1)}{2} \to \text{extr}.$

11.3. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0, \ x(1) = \xi.$

11.4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0.$

11.5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr}; \ x(0) = x(T_0) = 0.$

11.6. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0.$

11.7. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = x(T_0) = 0.$

11.8. $\int\limits_0^{T} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0.$

11.9. $\int\limits_0^{T} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = 0, \ x(T) = 0.$

11.10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ \int\limits_0^1 x\, dt = 1.$

11.11. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

11.12. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

11.13. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 tx\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

11.14. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 tx\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

11.15. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 1.$

11.16. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 x\,dt = \int_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 1.$

11.17. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 x\,dt = \int_0^1 tx\,dt = 0,\ x(1) = 1.$

11.18. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^1 x\,dt = \int_0^1 tx\,dt = 0,$

$x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

11.19. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^T x\,dt = 1,\ x(0) = 3.$

11.20. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^T x\,dt = \frac{1}{3},\quad x(T) = 1.$

11.21. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^\pi x \sin t\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

11.22. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^\pi x \sin t\,dt = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0.$

11.23. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \mathrm{extr}; \int_0^\pi x \sin t\,dt = 1, \int_0^\pi x \cos t\,dt = 0,$

$x(0) = 0.$

11.24. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ \int_0^\pi x \cos t\, dt = \frac{\pi}{2},$

$$\int_0^\pi x \sin t\, dt = -2, \ x(0) = 0.$$

11.25. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ \int_0^1 x e^t dt = 1, \ x(0) = 0.$

11.26. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}; \ \int_0^1 x e^t dt = 1, \ x(0) = x(1) = 0.$

11.27. $\int_0^{e-1} (t+1)\dot{x}^2 dt + 2x(0)[x(e-1)+1] \to \text{extr}.$

11.28. $\int_1^2 t^2\dot{x}^2 dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}.$

11.29. $\int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)\, dt \to \text{extr}; \ x(1) = 0.$

11.30. $\int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)\, dt \to \text{extr}; \ x(1) = x(e) = 0.$

11.31. $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\, dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \text{extr}.$

11.32. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \ x(T_0) = \xi.$

11.33. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \ x(T) = \xi.$

11.34. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(T_0) = \xi.$

11.35. $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \leqslant 1, \ x(T) = \xi.$

11.36. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \ x(0) = 0, \ x(T_0) = \xi.$

11.37. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=0,\ x(T)=\xi.$

11.38. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr};\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0)=0,\ x(T_0)=\xi.$

11.39. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr};\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0)=0,\ x(T)=\xi.$

11.40. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0)=0.$

11.41. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

11.42. $\int\limits_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};$

$|\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

11.43. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - 4x \sin t)\,dt \to \text{extr};$

$x(0)=0,\ x(T_0)=\xi.$

11.44. (P) $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0)=0.$

11.45. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ |\dot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = x(T_0) = 0.$

11.46. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int\limits_0^1 x^2 dt = 1.$

11.47. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int\limits_0^1 x^2 dt = 1,\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0.$

11.48. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int\limits_0^1 x^2 dt = 1,\ x(0)=0.$

11.49. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \text{extr};\ x(1)=1 \quad (x>0).$

11.50. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0)=x(1)=1\ (x>0).$

11.51. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr};$

$x(0)=1,\quad 2T+x(T)=2\quad (x>0).$

11.52. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr};\ \int\limits_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt=\frac{\pi}{2},\quad x(1)=0.$

11.53. $\int\limits_{-1}^0 x\,dt \to \mathrm{extr};\ \int\limits_{-1}^0 \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt=\frac{\pi}{2},\ x(-1)=0.$

11.54. $\int\limits_0^1 \left(\frac{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}{2}+x_1x_2\right)dt \to \mathrm{extr};\ x_1(0)=x_2(0)=1.$

11.55. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1x_2\right)dt \to \mathrm{extr};$

$x_1(0)=x_2(0)=0,\ x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

11.56. $\int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt \to \mathrm{extr};\ \int\limits_0^1 x_1\,dt=\int\limits_0^1 x_2\,dt=0,$

$x_1(0)=x_2(0)=0,\ x_1(1)=1,\ x_2(1)=2.$

11.57. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=0,\ x(1)=1.$

11.58. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0)=\dot{x}(1)=0,\ \dot{x}(0)=1.$

11.59. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=0,\ \dot{x}(1)=1.$

11.60. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};$

$x(0)=x(1)=0,\ \dot{x}(0)=-1,\ \dot{x}(1)=1.$

11.61. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2-48x)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0)=x(1)=0.$

11.62. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)\,dt \to \text{extr}; \;\; x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0.$

11.63. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

11.64. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + 48x)\,dt \to \text{extr}; \;\; x(0) = 0, \;\; x(1) = 1.$

11.65. $\int\limits_1^e t\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$x(1) = e + \frac{1}{2}, \;\; x(e) = \frac{e^2}{2}, \;\; \dot{x}(1) = 1.$

11.66. $\int\limits_1^e t\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \;\; x(1) = 0, \;\; \dot{x}(1) = 1, \;\; \dot{x}(e) = 2.$

11.67. $\int\limits_1^e t\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$x(1) = 0, \;\; \dot{x}(1) = 1, \;\; x(e) = e, \;\; \dot{x}(e) = 2.$

11.68. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \;\; x(1) = -1, \;\; x(e) = \dot{x}(1) = e.$

11.69. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \; x(1) = 0, \;\; \dot{x}(1) = 1, \;\; \dot{x}(e) = \frac{1}{e}.$

11.70. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$x(1) = 0, \;\; x(e) = \dot{x}(1) = 1, \;\; \dot{x}(e) = \frac{1}{e}.$

11.71. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \;\; x(1) = \frac{e}{2}, \;\; x(e) = \frac{3}{2}, \; \dot{x}(e) = \frac{1}{2e}.$

11.72. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$x(1) = 1, \;\; \dot{x}(1) = -1, \;\; \dot{x}(e) = -\frac{1}{e^2}.$

11.73. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2dt \to \text{extr};$

$x(1) = 1,\ \dot{x}(1) = -1,\ x(e) = \frac{1}{e},\ \dot{x}(e) = -\frac{1}{e^2}.$

11.74. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = \operatorname{sh}\pi.$

11.75. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(\pi) = \operatorname{sh}\pi.$

11.76. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};$

$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0, \quad x(\pi) = \operatorname{sh}\pi.$

11.77. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}.$

11.78. $\int\limits_0^T (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}.$

11.79. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

11.80. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = 1.$

11.81. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ \dot{x}(0) = 1.$

11.82. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(\pi) = 1.$

11.83. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr};\ \dot{x}(\pi) = 1.$

11.84. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

11.85. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

11.86. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0,\ \dot{x}(\pi) = 1.$

11.87. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x}(0) = 0,\ x(\pi) = 1.$

11.88. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = x(\pi) = 0,\ \dot{x}(0) = 1.$

11.89. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};$

$x(0) = x(\pi) = 0,\quad \dot{x}(\pi) = 1.$

11.90. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0.$

11.91. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0,\quad x(\pi) = 1.$

11.92. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};$

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ x(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

11.93. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};$

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

11.94. $\int\limits_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};$

$x(0) = x(\pi) = 0,\quad \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(\pi) = -1.$

11.95. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = 0,\ x(1) = \operatorname{sh} 1,\ \dot{x}(1) = \operatorname{ch} 1.$$

11.96. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = -\operatorname{sh} 1,\ \dot{x}(0) = \operatorname{ch} 1,\ x(1) = 0.$$

11.97. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = \operatorname{sh} 1.$$

11.98. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$\dot{x}(0) = \operatorname{sh} 1,\ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$$

11.99. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2},\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

11.100. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

11.101. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

11.102. $\int\limits_0^4 x\, dt \to \text{extr};\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = x(4) = 0.$

11.103. $\int\limits_0^4 x\, dt \to \text{extr};\ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = \dot{x}(4) = x(4) = 0.$

11.104. $\int_0^4 x\,dt \to \text{extr};$

$|\ddot{x}| \leqslant 2,\ x(0) = \dot{x}(0) = x(4) = \dot{x}(4) = 0.$

11.105. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr};\ \int_0^1 \ddot{x}^2 dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

11.106. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr};\ \int_0^1 \ddot{x}^2 dt = 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0.$

11.107. $\int_0^1 x\,dt \to \text{extr};\ \int_0^1 \ddot{x}^2 dt = 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

11.108. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

11.109. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x\,dt = 1,\ x(1) = \dot{x}(0) = 0.$

11.110. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x\,dt = 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$

11.111. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x\,dt = 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

11.112. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x^2 dt = 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

11.113. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x^2 dt = 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

11.114. $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x^2 dt = 1,\ \int_0^1 x\,dt = \int_0^1 tx\,dt = 0.$

11.115. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \operatorname{extr}; \quad \int\limits_0^1 x^2 dt = 1, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = 0,$

$x(0) = x(1), \ \dot{x}(0) = \dot{x}(1).$

11.116. $T \to \operatorname{extr}; \ \int\limits_0^T \ddot{x}^2 dt = 4,$

$x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 1, \ \dot{x}(T) = -1.$

11.117. $T \to \operatorname{extr}; \ \int\limits_0^T \ddot{x}^2 dt = 1, \ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ \dot{x}(T) = 1.$

11.118. $T \to \operatorname{extr}; \ \int\limits_0^T \ddot{x}^2 dt = 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = x(T) = 0, \ \dot{x}(T) = 1.$

11.119. $T \to \operatorname{extr}; \ \int\limits_0^T \ddot{x}^2 dt = 4,$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ x(T) = 1, \ \dot{x}(T) = 2.$

11.120. $\dot{x}(1) \to \operatorname{extr}; \ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2 dt = 4, \ x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0.$

11.121. $x(1) \to \operatorname{extr}; \ \int\limits_0^1 \ddot{x}^2 dt = 12, \ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$

11.122. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \operatorname{extr}; \ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \ \dot{x}(1) = 1.$

11.123. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \operatorname{extr}; \ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0), \ x(1) = 1.$

11.124. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \operatorname{extr};$

$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \ x(1) = 1.$

11.125. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \operatorname{extr};$

$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0, \ x(1) = 1.$

11.126. $\int_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dot{x}(1) = \ddot{x}(1) = 0, \; x(1) = 1.$$

11.127. $\int_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \text{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0, \; \ddot{x}(1) = 2.$$

11.128. (Р) Пусть $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, $\dot{x}(\cdot) \in L_2([0, 1])$ и $x(0) = 0$; тогда имеет место точное неравенство

$$\int_0^1 \frac{x^2}{t} dt \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

где λ — минимальный корень уравнения $\mathcal{J}_0(2\sqrt{\lambda}) = 0$, $\mathcal{J}_0$ — функция Бесселя [19, с. 437].

11.129. (Р) Пусть $x(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна, $\dot{x}(\cdot) \in L_2(\mathbf{R}_+)$ и $x(0) = 0$; тогда имеет место точное неравенство (неравенство Гильберта)

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{t^2} dt \leqslant 4 \int_0^\infty \dot{x}^2 dt$$

[19, с. 212].

11.130. Пусть $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, $\dot{x}(\cdot) \in L_2([0, 1])$ и $x(0) = 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{2t}\right)^2 dt \leqslant \int_0^1 \dot{x}^2 dt$$

[19, с. 437].

11.131. Пусть $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $\dot{x}(\cdot) \in L_2([0, 1])$ и $x(0) = 0$. Тогда имеют место следующие точные неравенства ([19, с. 438]):

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{t(2-t)} dt \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt;$

б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2-t)\, x^2}{t} dt \leqslant \int_0^1 \dot{x}^2 dt.$

11.132. Пусть $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $\dot{x}(\ ) \in L_2([0, 1])$ и $x(0) = x(1) = 0$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\int_0^1 \frac{x^2}{t(1-t)}\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt.$$

11.133. (P) Пусть $x(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна, $\dot{x}(\cdot) \in L_p(\mathbf{R}_+)$, $p > 1$, и $x(0) = 0$; тогда имеет место неравенство (неравенство Харди)

$$\int_0^\infty \left| \frac{x}{t} \right|^p dt \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |\dot{x}|^p\, dt.$$

11.134. (P) $\displaystyle\int_0^T (1 + \varepsilon |\ddot{x}|)\, dt \to \inf;\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = x_0,$

$\dot{x}(0) = v_0,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0 \quad (\varepsilon > 0)$. (При $\varepsilon = 0$ получается классическая задача о быстродействии. Величина $\varepsilon \displaystyle\int_0^T |\ddot{x}|\, dt$ характеризует расход топлива на поездку. Функционал здесь таков, что мы вынуждены одновременно экономить время и топливо.)

11.135. (P) $\displaystyle\int_0^T (1 + \varepsilon f(\ddot{x}))\, dt \to \inf;\ |\ddot{x}| \leqslant 1,\ x(0) = x_0,$

$\dot{x}(0) = v_0,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0 \quad (\varepsilon > 0)$; f — четная выпуклая функция.

11.136. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2m+1} x_i^4 \to \inf;\ \sum_{i=1}^{2m+1} x_i = \sum_{i=1}^{2m+1} x_i^3 = 0,\ \sum_{i=1}^{2m+1} x_i^2 = 1.$

11.137. Сто положительных чисел $x_1, \ldots, x_{100}$ удовлетворяют условиям $x_1^2 + \ldots + x_{100}^2 > 10\,000$, $x_1 + \ldots + x_{100} < 300$. Доказать, что среди них найдутся три числа, сумма которых больше 100.

11.138. Среди неотрицательных тригонометрических полиномов вида $x(t) = 1 + 2\rho_1 \cos t + \ldots + 2\rho_n \cos nt$ найти полином с наибольшим коэффициентом ρ_1.

11.139. Пусть $x(\cdot)$ — невозрастающая функция на полупрямой; тогда для любого $a > 0$ справедливо неравенство

Гаусса

$$\int_a^{\infty} x\,dt \leqslant \frac{4}{9a^2}\int_0^{\infty} t^2 x(t)\,dt.$$

11.140. Пусть $x(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbf{R}_+)$, а ее производная абсолютно непрерывна и $\dot{x}(\cdot)\in L_2(\mathbf{R}_+)$; тогда

$$\int_0^{\infty}\dot{x}^2dt \leqslant 2\left(\int_0^{\infty}x^2dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{\infty}\ddot{x}^2dt\right)^{1/2}$$

(неравенство Харди — Литтльвуда — Полиа).

11.141. $x(0)\to\sup;\ \int_0^{\infty}\left(x^2(t)+\left(x^{(n)}(t)\right)^2\right)dt\leqslant 1.$

11.142. $\int_0^1 |u|^p\,dt\to\inf;\ \ddot{x}+ux=0,\ x(0)=x(1)=0,$

$\dot{x}(0)=1\quad (p>1).$

11.143. $\int_0^1 |u|\,dt\to\inf;$

$\ddot{x}+ux=0,\ x(0)=x(1)=0,\quad \dot{x}(0)=1.$

§ 12. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

12.1. Некоторые теоремы анализа и алгебры.

12.1.1. Основная теорема алгебры.

Теорема. *Каждый полином с комплексными коэффициентами степени, не меньшей единицы, имеет комплексный корень.*

◁ Пусть $p(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ — полином степени $n\geqslant 1$, у которого $a_n\neq 0$. Рассмотрим элементарную задачу

$$f(z)=|p(z)|^2\to\inf;\qquad z\in\mathbf{C}, \tag{з}$$

где $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел.

Лемма. *Решение задачи существует.*

◁◁ В силу неравенства треугольника для модулей имеем

$$f(z)=|p(z)|^2\overset{\text{def}}{=}\left|\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|^2\geqslant\left(|a_n||z|^n-\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right|\right)^2=$$

$$=|a_n^2||z^{2n}|(1+O(1/|z|))\to+\infty$$

при $z \to +\infty$. Остается лишь сослаться на следствие из теоремы Вейерштрасса. ▷▷

Пусть $\hat{z}$ — решение задачи з. Не ограничивая общности, можно считать, что $\hat{z} = 0$ (иначе мы рассмотрели бы полином $q(z) = p(z - \hat{z})$). Тогда

$$f(0) \leqslant f(z) = \left| a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \right|^2 \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Если $a_0 = 0$, то точка $z = 0$ была бы корнем полинома и все было бы доказано. Пусть $a_0 \neq 0$ и s — тот номер, для которого $a_1 = \ldots = a_{s-1} = 0$, $a_s \neq 0$. Зафиксируем $\zeta = e^{i\theta}$ и рассмотрим задачу

$$\varphi(t) = f(t\zeta) \to \inf.$$

Из наших допущений следует, что $0 \in \operatorname{abs\,min} \varphi$. При этом

$$\varphi^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} \varphi \bigg|_{t=0} = \frac{d^k}{dt^k} \left(a_0 + a_s t^s e^{is\theta} + O\left(t^{s+1}\right)\right) \times$$

$$\times \left(\bar{a}_0 + \bar{a}_s t^s e^{-is\theta} + O\left(t^{s+1}\right)\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, s-1, \quad (1)$$

$$\varphi^{(s)}(0) = 2(s!) \operatorname{Re}\left(\bar{a}_0 a_s e^{is\theta}\right) = 2(s!) |a_0| |a_s| \cos(s\theta + \gamma). \quad (1')$$

Применим к задаче необходимое условие минимума (п. 2.6.1). Согласно ему s должно быть четным и при этом $\varphi^{(s)}(0) > 0$. Из выражения (1′) видно, что ζ всегда можно выбрать так, чтобы $\varphi^{(s)}(0) < 0$. Значит, $0 \notin \operatorname{loc\,min} \varphi$ и, значит, a_0 должно быть нулем. ▷

12.1.2. Критерий Сильвестра. При формулировке условий высших порядков приходится определять, является второй дифференциал функционала положительно определенной квадратичной формой или нет (п. 2.5.2). В конечномерном случае критерий положительной определенности дается известной теоремой Сильвестра. Покажем, что эта теорема является простым следствием теоремы Ферма для многомерных задач без ограничений.

Напомним, что симметричная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *положительно определенной*, если квадратичная форма $Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ положительна для любого ненулевого вектора $x \in \mathbf{R}^m$. При этом пишут $A > 0$. Определители $\det A_k$, где $A_k = (a_{ij})_{i,j=1}^k$, $k = 1, \ldots, m$, называются *главными минорами* матрицы A. Квадратичную форму $\langle A_k x, x\rangle$ $(x \in \mathbf{R}^k)$ обозначим $Q_k(x)$ $(Q = Q_m)$.

Теорема Сильвестра. *Матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда ее главные миноры положительны.*

Для матриц первого порядка утверждение теоремы очевидно. Пусть оно доказано для матриц порядка $n-1$ ($n \geqslant 2$). Докажем его для матриц порядка n.

Лемма. *Пусть* $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Тогда* $A_n > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\det A_n > 0$.

◁◁ 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$Q_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, 1) =$$
$$= f(y) = \langle A_{n-1}y, y\rangle + 2\langle a_n, y\rangle + a_{nn} \to \inf, \qquad (з)$$
$$y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

где $a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn-1})$. Это — гладкая задача без ограничений.

Решение $\widehat{y}$ задачи з существует. Действительно, по предположению индукции $A_{n-1} > 0$. Вследствие того, что определитель непрерывно зависит от элементов матрицы, при малых $\varepsilon > 0$ матрица $A_{n-1} - \varepsilon I_{n-1}$ (где I_{n-1} — единичная $(n-1)$-мерная матрица) будет также положительно определенной и, значит,

$$\langle (A_{n-1} - \varepsilon I_{n-1})y, y\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^{n-1} \Rightarrow \langle A_{n-1}y, y\rangle \geqslant \varepsilon |y|^2.$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского $f(y) \geqslant \varepsilon |y|^2 - 2|a_n||y| - |a_{nn}| \to +\infty$ при $|y| \to +\infty$, т. е. можно применять следствие из теоремы Вейерштрасса.

2. Необходимое условие — теорема Ферма — приводит к равенствам $f'(\widehat{y}) = 0 \Leftrightarrow A_{n-1}\widehat{y} + a_n = 0$.

3. В силу единственности стационарной точки $\widehat{y} = -A_{n-1}^{-1}a_n \in \operatorname{abs\,min} з$, откуда значение задачи

$$S_з = f(\widehat{y}) = \langle a_n, \widehat{y}\rangle + a_{nn} = a_{nn} - \langle a_n, A_{n-1}^{-1}a_n\rangle.$$

Разложим определитель матрицы A_n по последнему столбцу:

$$\det A_n = a_{nn} \det A_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\Delta_i$$

и, далее, каждый определитель Δ_i, $i = 1, \ldots, n-1$,— по последней строке. Тогда

$$\det A_n = a_{nn} \det A_{n-1} + \sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij}a_{in}a_{jn}.$$

Если теперь воспользоваться определением обратной матрицы к A_{n-1}, то приходим к формуле

$$\det A_n = \det A_{n-1}\left(a_{nn} + \langle a_n, A_{n-1}^{-1}a_n\rangle\right).$$

Значит, доказано, что $S_3 = \det A_n/\det A_{n-1}$.

Таким образом, если $A_n > 0$, то

$$0 < Q_n(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{n-1}, 1) = f(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{n-1}) = S_3 \Rightarrow \det A_n > 0.$$

Если же $\det A_n > 0$, то для вектора $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \neq 0$ получается неравенство $Q_n(x) > 0$ по предположению индукции. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_n \neq 0$, обозначим $y = (x_1/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n)$ и получим

$$Q_n(x) = x_n^2 f(y) \geqslant x_n^2 f(\hat{y}) = x_n^2 \det A_n/\det A_{n-1} > 0,$$

а это означает положительную определенность A. ▷▷

Теперь критерий Сильвестра выводится очень просто. Пусть $A_n > 0$. Тогда очевидно, что $A_{n-1} > 0$ и, значит, по предположению индукции $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, откуда по лемме следует, что $\det A_n > 0$. Если же $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, то из леммы сразу вытекает, что $A_n > 0$. ▷

12.1.3. Расстояние от точки до подпространства.

Теорема. *Пусть X — гильбертово пространство, $x^0, \ldots, x^k$ — линейно независимые элементы из X. Тогда расстояние ρ от точки x^0 до подпространства, натянутого на $x^1, \ldots, x^k$, выражается формулой*

$$\rho = \left(\det\left(\langle x^i, x^j\rangle\right)_{i,j=0}^k/\det\left(\langle x^i, x^j\rangle\right)_{i,j=1}^k\right)^{1/2}.$$

◁ Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(\xi) = \left\| x^0 + \sum_{i=1}^k \xi_i x^i \right\|^2 \to \inf, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{R}^k. \qquad (3)$$

Это — гладкая и выпуклая задача. Имеем

$$f(\xi) = \langle A_k\xi, \xi\rangle + 2\langle a_k, \xi\rangle + b,$$

где

$$A_k = \left(\langle x^i, x^j\rangle\right)_{i,j=1}^k, \quad a_k = \left(\langle x^0, x^1\rangle, \ldots, \langle x^0, x^k\rangle\right),$$
$$b = \langle x^0, x^0\rangle.$$

Заметим теперь, что в точности эту самую задачу мы решали в п. 12.1.2. Там было показано, что $S_3 = \det A_{k+1}/\det A_k$, где $A_{k+1} = \left(\langle x^i, x^j\rangle\right)_{i,j=0}^k$. Остается лишь учесть, что $S_3 = \rho^2$. ▷

Замечания. 1. Определители $\det A_k$ и $\det A_{k+1}$ называются *определителями Грама.*

2. В § 2 были рассмотрены частные случаи этой теоремы, когда были найдены расстояния до прямой и гиперплоскости.

12.1.4. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица $(a_{ij} = a_{ji})$ и $Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ — квадратичная форма, соответствующая матрице A.

Теорема. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *существует ортонормированный базис* $f_1, \ldots, f_n$, *в котором форма* Q *допускает представление*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i\rangle^2.$$

В базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ матрица формы Q диагональна. Направления вдоль векторов f_i называются *главными осями формы* Q, а переход к базису f — *приведением формы к главным осям.*

Подробное доказательство этой теоремы и ее обобщений средствами теории экстремальных задач см. в [13, с. 274—277].

12.2. Некоторые неравенства.

12.2.1. Неравенство Вейля.

Теорема. *Пусть* I — *это прямая* $\mathbf{R}$ *или полупрямая* $\mathbf{R}_+$, *функция* $x(t)$ *локально абсолютно непрерывна, причем* $x(t)$ *и* $t\cdot x(t)$ *принадлежат* $L_2(I)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_I x^2 dt \leqslant K(I)\left(\int_I t^2x^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_I \dot{x}^2 dt\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $K(\mathbf{R}) = 4$, $K(\mathbf{R}_+) = 2$; *неравенство точное и достигается для* $x(t) = B\exp(-At^2)$, $A > 0$ (см. [19, с. 199]).

Неравенство (1) для $I = \mathbf{R}$ выражает принцип неопределенности в квантовой механике. Докажем (1) для $I = \mathbf{R}_+$. Случай $I = \mathbf{R}$ аналогичен.

◁ 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^\infty \dot{x}^2 dt \to \inf; \quad \int_0^\infty (t^2 - 1)\, x^2 dt = 1 \tag{3}$$

и применим к ней принцип Лагранжа (хотя для бесконечного отрезка он в этой книге не обоснован). Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\int_0^\infty (\lambda_0\dot{x}^2+\lambda_1(t^2-1)x^2)\,dt.$$

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера: $-\lambda_0\ddot{x}+\lambda_1(t^2-1)x=0$;

б) трансверсальность: $\dot{x}(0)=0$.

3. Если $\lambda_0=0$, то $\widehat{x}\equiv 0$, что противоречит изопериметрическому условию. Значит, уравнение Эйлера сводится к следующему: $\ddot{x}+\lambda_1(1-t^2)x=0$. Непосредственно можно убедиться, что функция $\varphi(t)=\exp(-t^2/2)$ удовлетворяет этому уравнению с $\lambda_1=1$ и условию трансверсальности в нуле, причем $\varphi(t)\neq 0$ $\forall t\in\mathbf{R}_+$.

4. Семейство функций $x(t,\lambda)=\lambda\varphi(t)$ образует поле экстремалей, удовлетворяющее условию трансверсальности и покрывающее полуплоскость $t\geqslant 0$.

Выпишем равенство, соответствующее основной формуле Вейерштрасса (п. 10.3.1):

$$\int_0^\infty (\dot{x}^2-(1-t^2)x^2)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\dot{x}-\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}x\right)^2dt=\int_0^\infty(\dot{x}+tx)^2\,dt\geqslant 0. \qquad (2)$$

Справедливость его нетрудно получить непосредственно, интегрируя по частям.

Из (2) следует, что численное значение задачи равно единице и что решение ее доставляет функция $\widehat{x}(t)=C\exp(-t^2/2)$, где C выбрано из изопериметрического условия

$$C^2\int_0^\infty(1-t^2)e^{-t^2}dt=1.$$

Подставив теперь в (2) вместо $x(t)$ функцию $y(t/a)$, получаем

$$\int_0^\infty \dot{y}^2(\tau)\,d\tau-a^2\int_0^\infty y^2(\tau)\,d\tau+a^4\int_0^\infty \tau^2y(\tau)\,d\tau\geqslant 0\quad\forall a>0.$$

Применив условие неотрицательности квадратного трехчлена, приходим к (1). ▷

12.2.2. Обобщенное неравенство Вейля *).

Теорема. *Пусть $p > 1$, $s > 0$, функция $x(t)$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbf{R}_+$, причем функции $x(t)$ и $t^{s/p-1}x(t)$ принадлежат $L_p(\mathbf{R}_+)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}_+} t^{s-1}|x|^p\,dt \leqslant \frac{p}{s}\left(\int\limits_{\mathbf{R}_+} t^{p's}|x|^p\,dt\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{\mathbf{R}_+} |\dot{x}|^p\,dt\right)^{1/p}, \tag{1}$$

$$1/p + 1/p' = 1.$$

Неравенство точное и достигается для $x(t) = B\exp\left(-At^{\frac{p+s-1}{p-1}}\right)$ (см. [19, с. 199], где (1) доказано для $x \geqslant 0$).

◁ 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int\limits_0^\infty \left(|\dot{x}|^p - at^{s-1}|x|^p + bt^{p's}|x|^p\right)dt \to \inf. \tag{з}$$

Это — задача Больца, правда, на бесконечном интервале. Применим к ней принцип Лагранжа (хотя ранее задачи Больца на бесконечном интервале мы не рассматривали).

2. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\left(|\dot{x}|^{p-1}\operatorname{sign}\dot{x}\right) - at^{s-1}|x|^{p-1}\operatorname{sign}x + {}$$
$$+ bt^{p's}|x|^{p-1}\operatorname{sign}x = 0;$$

б) трансверсальность: $\dot{x}(0) = 0$.

3. Ищем решение уравнений п. 2 в виде $\varphi(t) = \exp(-t^\beta)$. Функция φ удовлетворяет условию трансверсальности при $\beta > 1$. Если подставить функцию φ в уравнение Эйлера, то получится, что оно удовлетворяется при

$$\beta = 1 + \frac{s}{p-1}\quad (\beta > 1),\quad a = s\beta^{p-1},\quad b = (p-1)\beta^p.$$

4. Семейство функций $\dot{x}(t, \lambda) = \lambda\varphi(t)$ образует поле экстремалей, удовлетворяющее условию трансверсальности и покрывающее полуплоскость $t \geqslant 0$. Выпишем равенство, соответствующее основной формуле Вейерштрас-

*) Этот пункт написан А. В. Брухтием.

са (функция наклона поля $u(t, x) = \dot{\varphi}(t)x/\varphi(t) = -\beta t^{\beta-1}x$):

$$\int\limits_0^\infty \left(|\dot{x}|^p - \left(s\beta^{p-1}t^{s-1} - (p-1)\ \beta^p t^{p's}\right)|x|^p\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(|\dot{x}|^p - |u(t, x)|^p - \right.$$

$$\left. - p(\dot{x} - u(t, x))\,|u(t, x)|^{p-1} \operatorname{sign} u(t, x)\right) dt. \qquad (2)$$

Это равенство также можно проверить непосредственно.

В силу выпуклости функции $\xi \to |\xi|^p$ при $p > 1$ выражение $|\dot{x}|^p - |u|^p - p(\dot{x} - u)|u|^{p-1} \operatorname{sign} u$ неотрицательно, откуда и из (2) следует неравенство

$$\int\limits_0^\infty \left(|\dot{x}|^p - \left(s\beta^{p-1}t^{s-1} - (p-1)\beta^p t^{p's}\right)|x|^p\right) dt \geqslant 0$$

$$\left(\beta = 1 + \frac{s}{p-1}\right). \qquad (3)$$

Подставив в (3) вместо $x(t)$ функцию $y(t/a)$, получаем

$$\int\limits_0^\infty |\dot{y}|^p d\tau - zs\beta^{p-1}\int\limits_0^\infty \tau^{s-1}|y|^p d\tau +$$

$$+ z^{p'}\beta^p(p-1)\int\limits_0^\infty \tau^{sp'}|y|^p d\tau \geqslant 0 \quad \forall z \geqslant 0, \qquad (4)$$

где $z = a^{p+s-1}$.

Для завершения доказательства нужно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть A, B и C — положительные числа, $p' > 1$. Тогда, если для любого $z \geqslant 0$ выражение $f(z) = Az^{p'} - Bz + C$ неотрицательно, то*

$$B \leqslant p^{1/p}p'^{1/p'}A^{1/p'}C^{1/p} = \hat{B} = f(\hat{z}), \quad \hat{z} = \left(\frac{B}{p'A}\right)^{1/(p'-1)},$$

$$1/p + 1/p' = 1.$$

◁◁ 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(z) = Az^{p'} - Bz + C \to \inf, \quad z \geqslant 0. \qquad (3')$$

Решение $\hat{z}$ этой задачи существует по следствию из теоремы Вейерштрасса, ибо $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Ясно, что $\hat{z} \neq 0$ (ибо $f'(0) < 0$).

2. Необходимое условие — теорема Ферма: $f'(\hat{z})=0$.

3. Стационарная точка $\hat{z}$ единственна: $f'(\hat{z})=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \hat{z}=\left(\frac{B}{p'A}\right)^{1/(p'-1)}$.

4. В силу единственности стационарной точки $\hat{z} \in \in \operatorname{abs}\min з'$ и, следовательно (так как $f(\hat{z}) \geqslant 0$ по условию),

$$0 \leqslant f(\hat{z}) = A\left(\frac{B}{p'A}\right)^{p} - B\left(\frac{B}{p'A}\right)^{1/(p'-1)} + C \Rightarrow B \leqslant \hat{B}. \ \triangleright\triangleright$$

Применение леммы к (4) с

$$A = \beta^p (p-1)\int_0^\infty \tau^{p's}|y|^p\,d\tau,$$

$$B = s\beta^{p-1}\int_0^\infty \tau^{s-1}|y|^p\,d\tau, \quad C = \int_0^\infty |\dot{y}|^p\,d\tau$$

немедленно приводит к (1). $\triangleright$

12.3. Неравенства для производных.

12.3.1. Неравенство Бернштейна. *Для любого тригонометрического полинома $x(\cdot)$ степени n имеет место неравенство*

$$\|\dot{x}\|_{C([-\pi,\pi])} \leqslant n\|x\|_{C([-\pi,\pi])}.$$

Неравенство точное и достигается на функциях $A\sin(nt+\gamma)$.

Доказательство этого неравенства средствами теории экстремальных задач см. в [18, с. 109].

12.3.2. Неравенство А. А. Маркова. *Для алгебраического полинома $x(\cdot)$ степени n имеет место неравенство*

$$\|\dot{x}\|_{C([-1,1])} \leqslant n^2\|x\|_{C([-1,1])}.$$

Неравенство точное и достигается на полиноме Чебышева $A\cos(n\arccos t)$.

Доказательство неравенства средствами теории экстремальных задач см. в [18, с. 109].

12.3.3. Одно неравенство для производных на полупрямой.

Теорема. *Пусть $I=\mathbf{R}$ или $I=\mathbf{R}_+$, функция $x(\cdot)$ принадлежит $L_2(I)$, ее первая производная $\dot{x}(\ )$ локально абсолютно непрерывна на I и вторая производная $\ddot{x}(\ )$ принадлежит $L_\infty(I)$. Тогда имеет место точное* *неравенство*

$$\|x\|_{L_\infty(I)} \leqslant K(I)\|x\|^{4/5}_{L_2(I)}\|\ddot{x}\|^{1/5}_{L_\infty(I)}. \tag{1}$$

Далее будет описана экстремальная функция в неравенстве (1) (т. е. функция, на которой это неравенство обращается в равенство), когда $I = \mathbf{R}_+$. Случай $I = \mathbf{R}$ доказывается аналогично.

◁ 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^\infty \frac{x_1^2}{2}\,dt \to \inf; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x_1(0) = 1. \tag{з}$$

Это — задача оптимального управления и одновременно задача выпуклого программирования. Используя ограниченность вторых производных и слабую полунепрерывность снизу функционала, нетрудно доказать, что решение $\widehat{x}(\cdot)$ задачи (з) существует. В силу строгой выпуклости функционала оно единственно. Функция Лагранжа задачи (з) имеет вид

$$\mathscr{L} = \int_0^\infty \left(\frac{\lambda_0}{2} x_1^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)\right) dt + \mu_1(x_1(0) - 1).$$

2. Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера:

$$-\dot{p}_1 + \lambda_0 x_1 = 0, \qquad -\dot{p}_2 - p_1 = 0;$$

б) трансверсальность по x: $p_1(0) = \mu_1$, $p_2(0) = 0$;

в) оптимальность по u: $\sup\limits_{|u| \leqslant 1} p_2 u = p_2 \widehat{u}(t)$.

Замечание. Вследствие того, что задача рассматривается на бесконечном интервале, требуется обоснование выписанных соотношений. Это нетрудно осуществить предельным переходом, рассматривая ограничение задачи на конечный интервал $[0, T]$ и затем переходя к пределу при $T \to +\infty$. При этом оказывается, что $p_2 \in L_1(\mathbf{R}_+)$.

3. Если $\lambda_0 = 0$, то из а) и б) следует, что $p_2(t) = -\mu_1 t$, и поскольку $\mu_1 \neq 0$, то либо $\widehat{u(t)} \equiv 1$, либо $\widehat{u}(t) \equiv -1$. Но ни то, ни другое невозможно, так как $\widehat{x_1} \in L_2(\mathbf{R}_+)$. В итоге соотношения из п. 2 сводятся к следующему (если p_2 обозначить через $\widehat{p}$ и положить $\lambda_0 = 1$):

$$\ddot{\widehat{p}} = -\widehat{x}, \quad \ddot{\widehat{x}} = \operatorname{sign}\widehat{p}, \quad \widehat{p}(0) = 0, \quad \widehat{x}(0) = 1. \tag{2}$$

Следствием (2) является интеграл

$$\dot{\hat{x}}\dot{\hat{p}} - |\hat{p}| + \frac{\hat{x}^2}{2} \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}_+. \tag{3}$$

Действительно, если продифференцировать левую часть (3) с учетом (2), то получится нуль, т. е. правая часть — константа. Но из соотношений $\hat{x} \in L_2(\mathbf{R}_+)$, $\ddot{\hat{x}} \in L_\infty(\mathbf{R}_+)$, $\hat{p} \in L_1(\mathbf{R}_+)$, $\ddot{\hat{p}} \in L_2(\mathbf{R}_+)$ следует, что $\dot{\hat{x}}\dot{\hat{p}} \in L_1(\mathbf{R}_+)$, поэтому слева — суммируемая на $\mathbf{R}_+$ функция и, значит, константа справа может быть только нулем.

4. В силу того, что в задаче выпуклого программирования необходимые условия минимума с $\lambda_0 \neq 0$ являются и достаточными, любое решение уравнений (2) приводит к решению задачи (з), а из единственности этого решения следует и единственность решения системы (2).

Пусть $\tau > 0$ — такая точка, что $\hat{p}(\tau) = 0$, $\hat{x}(\tau) \neq 0$. Тогда непосредственно убеждаемся, что функции

$$(\hat{x}(\tau))^{-1}\,\hat{x}\left(\sqrt{|\hat{x}(\tau)|}\,t + \tau\right),$$

$$(\hat{x}(\tau))^{-2}\,\mathrm{sign}\,\hat{x}(\tau)\,\hat{p}\left(\sqrt{|\hat{x}(\tau)|}\,t + \tau\right)$$

удовлетворяют (2). Значит, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= (\hat{x}(\tau))^{-1}\,\hat{x}\left(\sqrt{|\hat{x}(\tau)|}\,t + \tau\right), \\ \hat{p}(t) &= (\hat{x}(\tau))^{-2}\,\mathrm{sign}\,\hat{x}(\tau)\,\hat{p}\left(\sqrt{|\hat{x}(\tau)|}\,t + \tau\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (2)—(4) нетрудно вывести, что существует такая точка τ_1, что $\hat{p}(t) > 0$, $t \in (0, \tau_1)$, $\hat{p}(\tau_1) = 0$, $\hat{x}(\tau_1) < 0$, $\dot{\hat{p}}(\tau_1) < 0$. Отсюда и из (2)—(4) следует, что $\hat{x}(t) = -\rho^2\hat{x}(\rho(t-\tau_1))$ и на $[0, \tau_1]$ $\hat{x}(t) = -t^2/2 - \alpha t + 1$, где $\rho = ((\alpha^2 - 2)/(\alpha^2 + 2))^{1/2}$, $\tau_1 = \alpha(1+\rho)$ и α — единственный корень уравнения

$$\rho^2(\xi) - \rho(\xi) + 1 - \frac{\xi^4}{3}(1 + \rho(\xi))^2 + \xi^4(1 + \rho(\xi)) = 2\xi,$$

$$\rho(\xi) = \left(\frac{\xi^2 - 2}{\xi^2 + 2}\right)^{1/2}$$

на $(\sqrt{2}, 2)$.

Таким образом, экстремальная функция $\hat{x}(\cdot)$ такова, что ее вторая производная $\ddot{\hat{x}}$ принимает значение $(-1)^k$

на интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k=0, 1, \ldots$, $\tau_0=0$, $\tau_k = \tau_1 \sum_{s=0}^{k-1} \rho^{-s}$, $x(t) \equiv 0$ при $t \geqslant \lim_{k\to\infty} \tau_k$.

Простая проверка показывает, что наилучшая константа в (1) имеет вид

$$K(\mathbf{R}_+) = \|\hat{x}\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}^{-4/5}. \ \triangleright$$

Задача (з) для случая $I = \mathbf{R}$ без привлечения методов теории экстремальных задач была решена В. Н. Габушиным. На полупрямой (с использованием конструкций теории экстремальных задач) эта задача была решена Г. Г. Магарил-Ильяевым.

12.4. Геометрические неравенства.

12.4.1. Неравенство Адамара. *Пусть* $X = (x_i^j)_{i,j=1}^n$ — *произвольная квадратная матрица порядка* n. *Тогда имеет место неравенство*

$$(\det X)^2 \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (x_i^j)^2 \right). \tag{1}$$

Доказательство, основанное на теории экстремальных задач, см. в [13, с. 444].

12.4.2. Задача о центре тяжести.

Теорема. *Через любую точку, лежащую внутри выпуклого тела, расположенного в конечномерном пространстве, можно провести гиперплоскость так, чтобы эта точка оказалась центром тяжести сечения.*

$\triangleleft$ Докажем теорему для выпуклого ограниченного тела в $\mathbf{R}^{n+1}$ с гладкой границей. Общий случай легко сводится к этому. Обозначим рассматриваемое тело через A. Не ограничивая общности, можно считать, что заданная точка, принадлежащая $\operatorname{int} A$, является нулем пространства $\mathbf{R}^{n+1}$. Введем обозначения: $\mathbf{S}^n$ — единичная сфера пространства $\mathbf{R}^{n+1}$; $\omega \in \mathbf{S}^n$;

$$\Gamma(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle x, \omega\rangle = 0\}$$

— гиперплоскость, проходящая через нуль и ортогональная ω;

$$\Pi(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle x, \omega\rangle \geqslant 0\}$$

— полупространство, ограниченное гиперплоскостью $\Gamma(\omega)$ и содержащее вектор ω; $V(\omega)$ — объем тела $A \cap \Pi(\omega)$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$V(\omega) \to \inf, \quad \omega \in \mathbf{S}^n. \tag{з}$$

Функция V непрерывна, $\mathbf{S}^n$ — компакт, и, значит, существование решения следует из теоремы Вейерштрасса. Пусть $\widehat{\omega}$ — решение (з), $\Gamma(\widehat{\omega})$ — экстремальная гиперплоскость и $e_1, \ldots, e_n$ — базис в этой гиперплоскости. Обозначим через L_i подпространство, натянутое на векторы $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$. Сечение $\mathbf{S}^n$ подпространством $L_i^{\perp}$ — это окружность, которую обозначим O_i. Она содержит вектор $\widehat{\omega}$. Выберем в качестве параметра на O_i угол φ, отсчитываемый в обе стороны от вектора $\widehat{\omega}$. Пусть $\omega_i(\varphi)$ — это вектор из O_i, образующий угол φ с $\widehat{\omega}$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и $p_i(\varphi) = V(\omega_i(\varphi))$.

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$1.\ p_i(\varphi) \to \inf; \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{$з_i$}$$

Вследствие гладкости границы тела A функция p_i будет гладкой.

2. Необходимое условие минимума — теорема Ферма: $p_i'(0) = 0$. Вычислим, чему равна величина $p_i'(0)$. Подпространство L_i делит гиперплоскость $\Gamma(\widehat{\omega})$ на две части. При повороте гиперплоскости на угол $d\varphi$ объем пересечения $A \cap \Pi(\omega_i(d\varphi))$, примыкающий к одной из частей, увеличится, а к другой — уменьшится. Пусть $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — элемент n-мерного объема в $\Gamma(\widehat{\omega})$, сосредоточенного около точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. При повороте на угол $d\varphi$ этот элемент — $(n+1)$-мерный объем, равный $|x_i|\, dx\, d\varphi$. При этом в одном из полупространств нужно взять знак плюс, а в другом — минус. Суммируя эти величины, приходим к соотношению

$$p_i(d\varphi) = p_i(0) + \left(\int\limits_{\Gamma(\widehat{\omega}) \cap A} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \right) d\varphi + o(d\varphi).$$

3, 4. Таким образом,

$$\widehat{\omega} \in \operatorname{abs\,min} з \Rightarrow \int\limits_{\Gamma(\widehat{\omega}) A} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0, \ i = 1, \ldots, n,$$

т. е. 0 — это центр тяжести $\Gamma(\widehat{\omega}) \cap A$.▷

Замечания. 1. Если A — конус, то можно доказать, что сечение, описанное в теореме, единственно. Значит, в случае конуса мы приходим к неравенству

$$V(A \cap \Pi(\omega)) \geqslant V(A \cap \Pi(\widehat{\omega})) \quad \forall\, \omega \in \mathbf{S}^n,$$

где $\widehat{\omega}$ — тот вектор из $\mathbf{S}^n$, при котором заданная точка есть центр тяжести.

2. В § 2 были рассмотрены частные случаи этой теоремы, когда A — угол на плоскости и трехгранный угол в $\mathbf{R}^3$.

12.4.3. Неравенство Юнга.

Теорема. *Для любого ограниченного замкнутого множества A, расположенного в $\mathbf{R}^n$, имеет место следующее неравенство между диаметром $\mathscr{D}(A)$ множества A и радиусом $R(A)$ описанного шара:*

$$\mathscr{D}(A) \geqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\, R(A).$$

Доказательство, основанное на теории экстремальных задач, см. в [13, с. 431].

12.5. Полиномы наилучшего приближения. В первых трех разделах этого пункта речь идет о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля. Через T_{nq} обозначим полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющийся в метрике $L_q([-1, 1])$, т. е. решение следующей задачи:

$$\left\| t^n + \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right\|_{L_q([-1,1])} \to \inf.$$

12.5.1. Полиномы Лежандра.

Теорема. *Имеет место следующее равенство:*

$$T_{n2}(t) = \frac{2^n (n!)^2 P_n(t)}{(2n)!} = \frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n,$$

где $P_n(\cdot)$ — полином Лежандра.

Решение задачи, основанное на теории экстремальных задач, см. в [18, с. 93].

12.5.2. Полиномы Чебышева.

Теорема. *Имеет место следующее равенство:*

$$T_{n\infty}(t) = 2^{-(n-1)} \cos(n \arccos t).$$

Полином $T_{n\infty}(t)$ называется *полиномом Чебышева*. Этот результат немедленно следует из теоремы об альтернативе — п. 12.5.4.

12.5.3. Полином Чебышева второго рода.

Теорема. *Имеет место следующее равенство:*

$$T_{n1}(t) = \frac{\dot{T}_{n+1\,\infty}(t)}{n+1} = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{2^n\, 1-t^2}}.$$

Полиномы T_{n1} называют *полиномами Чебышева второго рода*. Решение задачи, основанное на теории экстремальных задач, см. в [18, с. 96].

12.5.4. Теорема об альтернансе. *Для того чтобы полином $\widehat{p}(\cdot)$ степени $n-1$ наименее уклонялся от непрерывной функции $x(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0, t_1])$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось $s \geqslant n+1$ точек, в которых $x(\ ) - \widehat{p}(\ )$ принимает, чередуясь, свои максимальное и минимальное значения.*

Напомним, что полином наименьшего уклонения в $C([t_0, t_1])$ определяется соотношением

$$\|x(\cdot) - \widehat{p}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])} = \inf_{p(\ )\in\mathscr{P}_n} \|x(\cdot) - p(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])}.$$

◁ Необходимость. 1. Рассмотрим задачу

$$f(x) = \max_{t\in[t_0\ t_1]} f(t, x) = \|x(\cdot) - p(\cdot)\| = \max_{t\in[t_0,t_1]} \left| x(t) + \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right| \to \inf.$$

Функция $f(\cdot)$ — выпуклая, непрерывная и растет на бесконечности. Значит, по следствию из теоремы Вейерштрасса решение $\widehat{x}$ задачи существует.

2. Необходимое (и достаточное) условие: $0 \in \partial f(\widehat{x})$.

3. Применяем теорему об очистке. Согласно этой теореме, если $0 \in \partial f(\widehat{x})$, то найдется $s \leqslant n+1$ точек $t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_s \leqslant t_1$, s чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и s векторов $y_i \in \partial_x f(\tau_i, \widehat{x})$ таких, что $f(\tau_i, \widehat{x}) = \|\widehat{x}(\cdot) - \widehat{p}(\ )\|$ и

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i = 0. \tag{1}$$

Вследствие того, что $f(\tau_i, \widehat{x}) \neq 0$, субдифференциал совпадает с производной. Дифференцируя $f(\tau_i, x)$ по x в точке $\widehat{x}$, получаем

$$y_i = \operatorname{sign}\left(x(\tau_i) - \widehat{p}(\tau_i)\right)\left(1, \tau_i, \ldots, \tau_i^{n-1}\right). \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что система

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \operatorname{sign}\left(x(\tau_i) - \widehat{p}(\tau_i)\right) \tau_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

имеет нетривиальное решение и, значит, $s = n+1$. Рассмотрим полином $\Pi(t)=\prod_{i=1}^{n+1}(t-\tau_i)$. Применяя теорию вычетов, получаем, что если контур Γ охватывает $[t_0, t_1]$, то

$$0=\int_\Gamma \frac{\xi^s d\xi}{\Pi(\xi)}=2\pi i\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t_k^s}{\Pi'(t_k)},$$

откуда немедленно следует, что $\lambda_i \operatorname{sign}(x(\tau_i)-\widehat{p}(\tau_i))= =a\Pi'(\tau_i)$. Из последней формулы видно, что знаки $x(\tau_i)-\widehat{p}(\tau_i)$ либо совпадают, либо противоположны знакам $\Pi'(\tau_i)$, которые чередуются. Итак, нашлось $n+1$ точек $\tau_1<\ldots<\tau_{n+1}$, для которых $|x(\tau_i)-\widehat{p}(\tau_i)|= =\|x(\cdot)-\widehat{p}(\cdot)\|$ и знаки $x(\tau_i)-\widehat{p}(\tau_i)$ чередуются.

Достаточность. Пусть в точках $t_0\leqslant\tau_1<\tau_2<\ldots \ldots<\tau_s\leqslant t_1$, $s\geqslant n+1$, функция $x(\ )-\widehat{p}(\cdot)$ принимает, чередуясь, максимальное и минимальное значения. Если допустить, что для некоторого $\bar{p}(\cdot)\in\mathscr{P}_n$

$$\|x(\cdot)-\bar{p}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])}<\|x(\cdot)-\widehat{p}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])},$$

то окажется, что величины $\widehat{p}(\tau_i)-\bar{p}(\tau_i)$ являются попеременно то отрицательными, то положительными. Но тогда по теореме Ролля производная $\dot{\widehat{p}}-\dot{\bar{p}}$ должна иметь не менее n нулей. Этого, однако, не может быть, поскольку $\dot{\widehat{p}}-\dot{\bar{p}}$ — полином степени не менее $n-1$; получили противоречие, из которого следует требуемое. ⊳

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

К введению

1. $X = \mathbf{R}, f(x) = \sin x$. 2. $X = \mathbf{R}, f(x) = 1/(1 + x^2)$. 3. $X = \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$. 4. $X = \mathbf{R}, f(x) = (\operatorname{arctg} x)^3$. 5. $X = \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \sin x$. 6. $X = \mathbf{R}^2$, $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2}$. 7. $X = \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2$. 8. $X = \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2)$.

9. Нет. Рассмотреть функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad X = \mathbf{R}.$$

12. $X = \mathbf{R}^2$, $f_0(x_1, x_2) = \sqrt{(1-x_1)^2 + (2-x_2)^2} \to \inf$; $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$. 13. $X = \mathbf{R}^3$, $f_0(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} \to \inf$; $f_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b = 0 \Leftrightarrow |x - \xi| \to \inf$; $\langle a, x\rangle = b$.

14. $X = \mathbf{R}^2$, $|x^1 - x^2|^2 + |x^2 - x^3|^2 + |x^1 - x^3|^2 \to \inf$; $|x^i|^2 = 1$, $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, $i = 1, 2, 3$.

15. $X = \mathbf{R}^2$, $|x - \xi^1| + |x - \xi^2| + |x - \xi^3| \to \inf$; $\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i)$, $i = 1, 2, 3$ — заданные точки. 16. $x(a - 2x)(a - x) \to \sup$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

17. $X = \mathbf{R}^n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^n + \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2 dt \to \inf$.

К упражнениям § 1

К п. 1.1. 1. Функция N задает норму при следующих значениях параметров: а) $p \geqslant 1$; б) и в) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; г) $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. 2. Эквивалентность норм следует из неравенства $\|x\|_\infty \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$. 4. Следует положить $\|x\| = \inf\{t > 0 \mid x/t \in B\}$. 7. Например, пространство непрерывных на отрезке

$[0,\ 1]$ функций с нормой $\|x(\cdot)\| = \left(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ — нормированное, но не банахово. 9. Нет, ибо функционал не является ограниченным. 10. а) $\|x\| = \max\left(\frac{|x_1|}{|a_1|}, \frac{|x_2|}{|a_2|}\right)$; б) $\|x\| = \max\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2, \left|\frac{x_1}{b_1}\right|, \left|\frac{x_2}{b_2}\right|\right)$. 11. Надо взять, например, линейную оболочку функций $f_1(t) = \sin 2\pi t$, $f_2(t) = \cos 2\pi t$. Тогда $\|x_1 f_1(\cdot) + x_2 f_2(\cdot)\|_{C([0,1])} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. 12. а) $(|y_1|^2 + |y_2|^2)^{1/2}$; б) $|y_1| + |y_2|$; в) $(|y_1|^q + |y_2|^q)^{1/q}$, $1/p + 1/q = 1$; г) $(b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2)^{1/2}$, где $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = A^{-1}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

К п. 1.2. 1. $f(x) = x$, $C = (-1,\ 1)$. 2. $X = \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. 4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ 5. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да. 6. Единичный шар в пространстве l_2 (и вообще — в любом бесконечномерном пространстве).

7. Следует, например, вписать в единичный шар пространства l_2 бесконечное число $B(x_n, \rho)$, $n \geqslant 1$, непересекающихся шаров фиксированного радиуса ρ и положить

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| - 1, & \|x\| \geqslant 1, \\ (1 - 1/n)(\|x - x_n\| - \rho), & x \in B(x_n, \rho), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда нижняя грань функционала f равняется $-\rho$, но не достигается ни в какой точке.

$$9.\ X = C([-1, 1]),\ L = \left\{x(\cdot) \,\middle|\, \int\limits_{-1}^{1} x(t)\operatorname{sign} t\,dt = 0\right\},\ \hat{x}(t) = t.$$

10. Можно рассмотреть, например, функционал $l(x,\ y) = x + y$. 12. Рассмотреть в пространстве l_2 компактный эллипсоид $A = \left\{x = \{x_k\}_{k \geqslant 1} \in l_2 \,\middle|\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \leqslant 1\right\}$ и луч $B = \{x = \{x_k\}_{k \geqslant 1} \in l_2 \mid x_k = t/k,\ t > 0,\ k = 1, 2, \ldots\}$.

К п. 1.4. 1. $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $\hat{x} = 0$. 2. $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, $\hat{x} = 0$. 3. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ в полярных координатах $x = (x_1, x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ определяется равенством $f(x) = r\cos 3\varphi$, $\hat{x} = 0$.

$$4.\ f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2,\ x_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \hat{x} = (0, 0).$$

$$5.\ f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ рационально}, \\ 0, & x \text{ иррационально}, \end{cases} \quad \hat{x} = 0.$$

1.1. $f'(\hat{x})[x] = Ax, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1.2. Решение. Производную Фреше находим по определению:

$$f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) = A(\hat{x}+x) - A\hat{x} = Ax \Rightarrow f'(\hat{x})[x] = Ax.$$

1.3. $f'(\hat{x})[x] = Ax, \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. 1.4. $f'(\hat{x})[x] = 2\langle \hat{x}, x\rangle = 2\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i x_i$. 1.5. $f'(\hat{x})[x] = \langle a, x\rangle$. 1.6. $f'(\hat{x})[x] = 2\langle \hat{x}, x\rangle$.

1.7. Решение. Отображение f является суперпозицией отображений $f = \varphi \circ g$, $g\colon H \to \mathbf{R}$, $g(x) = \langle x, x\rangle$, $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$. По теореме о суперпозиции при $\hat{x} \neq 0$

$$f'(\hat{x})[x] = \varphi'(\hat{t})[g'(\hat{x})[x]] = \langle \hat{x}, x\rangle/\sqrt{\hat{t}} = \langle \hat{x}, x\rangle/\|\hat{x}\|, \quad \hat{t} = g(\hat{x}).$$

1.8. $f'(\hat{x})[x] = x/\|\hat{x}\| - \hat{x}\langle \hat{x}, x\rangle/\|\hat{x}\|^3$. 1.9. $f'(\hat{x})[x] = 2\langle Ax, \hat{x}\rangle$.

1.10. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$. 1.11. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = 3\int_0^1 \hat{x}^2(t)x(t)\,dt$.

1.12. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = 2\int_0^1 \hat{x}(t)\,dt \int_0^1 x(t)\,dt$. 1.13. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = 6\left(\int_0^1 \hat{x}^2(t)\,dt\right)^2 \int_0^1 \hat{x}(t)x(t)\,dt$. 1.14. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = x(0)$.

1.15. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = 2x(1)\hat{x}(1)$.

1.16. Решение. Производную Фреше находим по определению:

$$f(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - f(\hat{x}(\cdot)) = (\hat{x}(0) + x(0))(\hat{x}(1) + x(1)) - \hat{x}(0)\hat{x}(1) = x(0)\hat{x}(1) + x(1)\hat{x}(0) + r(x),$$

$$r(x) = x(0)x(1) = o(\|x\|_{C([0,1])}) \Rightarrow f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = x(0)\hat{x}(1) + x(1)\hat{x}(0).$$

1.17. $\hat{x}(0) \neq 0 \Rightarrow f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = x(0)\operatorname{sign}\hat{x}(0)$, $\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow f \notin D(\hat{x}(\cdot))$. 1.18. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = x(0)e^{\hat{x}(0)}$.

1.19. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = x(1)\cos\hat{x}(1)$. 1.20. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = -x(\cdot)\sin\hat{x}(\cdot)$. 1.21. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \int_0^1 x(t)\operatorname{sign}\hat{x}(t)\,dt$.

1.22. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \dot{x}(t)\dot{\hat{x}}(t)\Big/\sqrt{1 + \dot{\hat{x}}^2(t)}$.

1.23. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \varphi_x(t, \hat{x}(t))x(t)$.

1.24. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \int_0^1 \varphi'(\hat{x}(t))\,x(t)\,dt$.

1.25. Решение. Отображение f является суперпозицией отображений $f = k \circ g$, $g\colon C([t_0, t_1]) \to \mathbf{R}^2$, $g(x(\cdot)) = (x(t_0), x(t_1))$, $k\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $k(\tau_1, \tau_2) = \varphi(\tau_1, \tau_2)$. По теореме о суперпозиции $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = k'(\hat{\tau})[g'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)]]$, $\hat{\tau} = g(\hat{x}(\cdot))$, $k'(\hat{\tau})[\tau] = \varphi_{\tau_1}(\hat{\tau}_1)\tau_1 + \varphi_{\tau_2}(\hat{\tau}_2)\tau_2$, $g'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = (x(t_0), x(t_1)) \Rightarrow f'(\hat{x}(\cdot)) \times [x(\cdot)] = \varphi_{x(t_0)}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))\, x(t_0) + \varphi_{x(t_1)}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))\, x(t_1)$.

1.26. $f'(\hat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\, x(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\, \dot{x}(t)\right) dt$. **1.27.** $x = 0$. **1.28.** $f(x) = |x_i| = |x_j|$ для некоторых $i \neq j$. **1.29.** $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 x_2 \ldots x_n = 0\}$.

1.30. Решение. Возьмем последовательность функций $x_n(\cdot) \in C([0, 1])$: $x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1 - 1/n], \\ 2n(1-t) - 1, & t \in [1 - 1/n, 1]. \end{cases}$ Поскольку $\|x_n(\cdot)\|_{C([0,1])} = 1$, то $\|x^*\| \geqslant \lim\limits_{n \to +\infty} \langle x^*, x_n(\cdot)\rangle = 8$. С другой стороны, очевидно, что $\|x^*\| \leqslant 8$. Итак, $\|x^*\| = 8$.

1.31. $3/2$. **1.32.** $1 + 2/\pi$. **1.33.** $\sum\limits_{k=1}^{n} |p_k| + \int\limits_0^1 |q(t)|\, dt$. **1.34.** $1/\sqrt{3}$. **1.35.** $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

1.36. Решение. В силу неравенства Коши — Буняковского $\langle x^*, x\rangle \leqslant \left(\int\limits_0^1 \sin^2 \pi t\, dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 x^2(t)\, dt\right)^{1/2} \Rightarrow \|x^*\| \leqslant 1/\sqrt{2}$.

С другой стороны, $\|x^*\| \geqslant \langle x^*, \sqrt{2}\sin \pi t\rangle = 1/\sqrt{2}$. Так как $\|\sqrt{2}\sin \pi t\|_{L_2([0,1])} = 1$, то $\|x^*\| = 1/\sqrt{2}$.

1.37. $\sqrt{5/2}$.

1.38. $\Lambda^*\colon l_2 \to l_2$, $\Lambda^* y = (0, y_1, y_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$.

1.3.9 $\Lambda^* y = (y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$.

1.40. $T_{\hat{x}} M = \{0\}$, $T^{+}_{\hat{x}} M = \mathbf{R}^2_-$.

1.41. $T_{\hat{x}} M = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-$, $T^{+}_{\hat{x}} M = \mathbf{R}^2 \setminus \mathring{\mathbf{R}}^2_+$. **1.42.** $\operatorname{cone}\{(0, 1)\}$.

1.43. $\{0\}$. **1.44.** $\mathbf{R}^2$. **1.45.** $\operatorname{lin}\{(4, -1)\}$.

1.46. $\operatorname{lin}\{e_2, \ldots, e_n\}$, $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис. **1.47.** $\left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \hat{x}_i = 0\right\}$. **1.48.** $\operatorname{lin}\{1, t, \ldots, t^{n-1}\}$.

1.49. Решение. Рассмотрим отображение $F\colon C([0, 1]) \to \mathbf{R}$, $F(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \sin x(t)\, dt$. Тогда $M = \{x(\cdot) \in C([0,1]) \mid F(x(\cdot)) = F(\hat{x}(\cdot)) =$

$= 2/\pi\}$. Легко проверить, что F удовлетворяет всем условиям теоремы о касательном пространстве и $F'(\widehat{x}(\cdot))[x(\cdot)] = \int\limits_0^1 x(t) \times \cos \widehat{x}(t)\,dt$. Согласно этой теореме $T_{\widehat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\widehat{x}(\cdot)) =$

$$= \left\{ x(\cdot) \in C([0, 1]) \,\middle|\, \int\limits_0^1 x(t) \cos \pi t\, dt = 0 \right\}.$$

1.50. $\{h(\cdot) \in C([0, 1]) \mid h(0) = h(1) = 0\}$. **1.51.** $\mathbf{R}$.

1.52. Решение. По определению вектор $h = 1$ является односторонним касательным вектором к множеству M в точке $\hat{x} = 0$, если $\exists \delta > 0$ и отображение r: $(0, \delta) \to \mathbf{R}$ такое, что $\alpha + r(\alpha) \in M$ и $r(\alpha) = o(\alpha)$ при $\alpha \to 0$. Положим для $\alpha \in (0, 1)$:

$$r(\alpha) = \begin{cases} -\alpha + \dfrac{1}{n}, & \alpha \in \left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right), \dfrac{1}{n}\right], \\[2ex] -\alpha + \dfrac{1}{n+1}, & \alpha \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)\right]. \end{cases}$$

Тогда $\alpha + r(\alpha) \in M$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{|r(\alpha)|}{\alpha} \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 0$.

Таким образом, $1 \in T^+_{\hat{x}}M \Rightarrow T^+_{\hat{x}}M = \mathbf{R}_+$.

1.53. $\{0\}$. **1.54.** $\{0\}$.

2.1. $(1, 0) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +\infty$. **2.2.** $(5, 2) \in \operatorname{loc\,min}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **2.3.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, стационарная точка: $(2, 3) \notin \operatorname{loc\,extr}$. **2.4.** $(-4, 14) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **2.5.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, стационарная точка: $(8, -10) \notin \operatorname{loc\,extr}$. **2.6.** $(-2/3, -1/3, 1) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = -4/3$, $S_{\max} = +\infty$. **2.7.** $(1, 1) \in \operatorname{loc\,max}$, $S_{\max} = +\infty$, $S_{\min} = -\infty$, $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0) \notin \operatorname{loc\,extr}$. **2.8.** $(-4/5, -3/5) \in \operatorname{abs\,min}$, $(4/5, 3/5) \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = -S_{\min} = 5$. **2.9.** $(3/25, 4/25) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 1/25$, $S_{\max} = +\infty$. **2.10.** $(1/2, 1/2) \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = e^{1/4}$, $S_{\min} = 0$ не достигается. **2.11.** $(-1/2, 3/2) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **2.12.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **2.13.** $(1/6, 1/3, 1/2) \in \operatorname{loc\,max}$, $(t, 0, 1-t) \in \operatorname{loc\,max}$ $\forall t > 1$ и $t < 0$, $(t, 0, 1-t) \in \operatorname{loc\,min}$ $\forall 0 < t < 1$, $S_{\max} = +\infty$, $S_{\min} = -\infty$. **2.14.** $\{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})\} \in \operatorname{abs\,min}$, $\{(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\} \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = -S_{\min} = 1/(3\sqrt{6})$. **2.15.** $\{(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})\ (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\} \in \operatorname{abs\,min}$, $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\ (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\} \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = -S_{\min} = 1/(3\sqrt{3})$. **2.16.** $(0, \ldots, 0) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 0$, $(\pm n^{-1/4}, \ldots, \pm n^{-1/4}) \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = \sqrt{n}$. **2.17.** $(0, \ldots, 0) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 0$. $\{(\pm 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \pm 1)\} \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = 1$. **2.18.** $(-2, 0, 7) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$ $(x_n = (-n, 0, 2n+3))$. **2.19.** $(0, 1) \in \operatorname{abs\,min}$, $(1, 0) \in \operatorname{abs\,max}$. **2.20.** $(0, 1, 0) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

2.21. Решение. 1. Формализация: $f(x) = x(8-x)(8-2x) \to \sup$; $0 \leqslant x \leqslant 4$. По теореме Вейерштрасса решение $\hat{x}$ существует. Ясно, что $\hat{x} \neq 0$ и $\hat{x} \neq 4$, ибо $f(0) = f(4) = 0$, а функция f принимает и положительные значения. 2. Необходимое условие — теорема Ферма: $f'(\hat{x}) = 0$.

3. $f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 32 = 0 \Rightarrow \hat{x} = 4 - 4/\sqrt{3}$.

4. В силу существования решения и единственности стационарной точки $\hat{x} \in \operatorname{abs}\max$. Ответ. Одно число равно $4 - 4/\sqrt{3}$, другое $4 + 4/\sqrt{3}$.

Тарталья выразил ответ так: «Число (т. е. 8) надо разделить пополам, квадрат этой половины, увеличенный на треть этого квадрата, равен квадрату разности обеих частей». Действительно,

$$4^2 + 4^2/3 = 64/3 = ((4 + 4/\sqrt{3}) - (4 - 4/\sqrt{3}))^2.$$

2.22. Равнобедренный треугольник. 2.23. Точка E — середина $[BC]$ (решение см. в АТФ, с. 31). 2.24. Центр тяжести зафиксированной грани. 2.25. $t^2 - 1/3 \in \operatorname{abs}\min$. 2.26. $t^3 - 3t/5 \in \operatorname{abs}\min$. Общий случай см. в § 12. 2.27. $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n) \in \operatorname{abs}\max$, $\hat{p}_1 = \ldots = \hat{p}_n = 1/n$. 2.28. В точке преломления выполнен закон Снеллиуса: $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$, где α_1 — угол падения, α_2 — угол преломления, v_1 и v_2 — скорости света в средах (см. АТФ, рис. 13). 2.29. Квадрат, 2.30. Правильный треугольник.

2.31. Решение. Формализация: $V(x) = \pi x(1 - x^2/4) \to \sup$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ (x — высота цилиндра). Далее, рассуждения аналогичны рассуждениям в задаче 2.21. Ответ. Высота цилиндра равна $2/\sqrt{3}$.

2.32. Высота конуса равна $4/3$. 2.33. Высота конуса равна $4/3$. 2.34. Радиус основания равен $((n-1)/n)^{1/2}$. 2.35. Куб. 2.36. Высота конуса равна $1 + 1/n$. 2.37. Правильный тетраэдр.

2.38. Решение. 1. Формализация:

$$V(x_1 - e, \ldots, x_n - e) = \det\left(y_i^j\right)_{i,j=1}^n \to \sup; \quad |x_i|^2 = 1, \quad i = 1, \ldots n,$$

где $e = (1, 0, \ldots, 0)$, $x_i = \left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)$, $y_i^j = x_i^j$, если $j > 1$ и $y_i^1 = x_i^1 - 1$. В силу компактности множества допустимых элементов по теореме Вейерштрасса решение существует. Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \lambda_0 V + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \mu_i |x_i|^2$.

2. Необходимое условие: $\mathscr{L}_{x_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 V_{x_i} + \mu_i \widehat{x}_i = 0$.

3. Если допустить, что $\lambda_0 = 0$, то для i_0, для которого $\mu_{i_0} \neq 0$, получилось бы, что $\widehat{x}_{i_0} = 0$, что противоречит $|x_{i_0}| = 1$. Положим $\lambda_0 = 1$. Производная определителя по некоторой строке — это вектор, составленный из алгебраических дополнений к элементам этой строки: $\widehat{V}_{x_i} = \left(\widehat{A}_i^1, \ldots, \widehat{A}_i^n\right) = \widehat{A}_i$. При этом $\langle \widehat{A}_i, \hat{x}_j - e\rangle = 0$, $i \neq j$, ибо это скалярное произведение есть детерминант матрицы с двумя одинаковыми строками. Значит, из п. 2 следует, что вектор $\hat{x}_i$ ортогонален всем векторам $\hat{x}_j - e$, $j \neq i \Rightarrow \hat{x}_i \perp \hat{x}_j - \hat{x}_k$,

$j,\ k \neq i$. Но тогда $\langle \hat{x}_i, \hat{x}_j\rangle = \langle \hat{x}_i, \hat{x}_k\rangle$ и, значит,

$$|\hat{x}_i - \hat{x}_j|^2 = 2 - 2\langle \hat{x}_i, \hat{x}_j\rangle = 2 - 2\langle \hat{x}_i, \hat{x}_k\rangle = |\hat{x}_i - \hat{x}_k|^2;$$

далее,

$$\langle \hat{x}_i, \hat{x}_j - e\rangle = 0 \Rightarrow \langle \hat{x}_i, \hat{x}_j\rangle = \langle \hat{x}_i, e\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\hat{x}_i - e|^2 = 2 - 2\langle \hat{x}_i, e\rangle = 2 - 2\langle \hat{x}_i, \hat{x}_j\rangle = |\hat{x}_i - \hat{x}_j|^2.$$

Таким образом, у экстремального симплекса все ребра равны.

Ответ. Правильный симплекс.

2.39. Правильный треугольник. 2.40. Правильный многоугольник. 2.41. Правильный многоугольник.

2.42. Решение. 1. Формализация: $\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi \to \sup$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ ($a = |OE|$, угол CEB обозначен через φ, а площадь четырехугольника, вписанного в окружность, равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними). Делаем замену $a \sin \varphi = \sqrt{z}$ и приходим к задаче $f(z) = z(1 - z) \to \sup$; $0 \leqslant z \leqslant a^2$. По теореме Вейерштрасса решение $\hat{z}$ существует.

2. Если $0 < \hat{z} < a^2$, то необходимое условие — теорема Ферма: $f'(\hat{z}) = 0$.

3. $f'(\hat{z}) = 0 \Leftrightarrow \hat{z} = 1/2$.

4. В силу существования решения одна из критических точек $\{0, 1/2, a^2\}$ доставляет абсолютный максимум в задаче. Сравнивая значение функции f в этих точках, находим решение

Ответ. Если $0 \leqslant a \leqslant 1/\sqrt{2}$, то $\hat{z} = a^2$, т. е. $\hat{\varphi} = \pi/2$; если $1/\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1$, то $\hat{z} = 1/2$, т. е. $\hat{\varphi} = \arcsin \dfrac{1}{a\sqrt{2}}$.

2.43. Центр вписанного круга.

2.44. Решение. 1. Формализация:

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|^2 + |x_1 - e|^2 + |x_2 - e|^2 \to \sup;$$

$$|x_1|^2 = |x_2|^2 = 1 \ (e = (1, 0),\ x_i \in \mathbf{R}^2,\ i = 1, 2,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

круг единичного радиуса). Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \lambda_0 f(x_1, x_2) + \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2.$$

2. Необходимое условие:

$$\mathscr{L}_{x_1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 (x_1 - x_2 + x_1 - e) + \lambda_1 x_1 = 0,$$
$$\mathscr{L}_{x_2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 (x_2 - x_1 + x_2 - e) + \lambda_2 x_2 = 0.$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_{\frac{1}{2}} = \lambda_2 = 0$, все множители Лагранжа — нули. Полагаем $\lambda_0 = -1 \Rightarrow (2 - \lambda_1) x_1 = x_2 + e$, $(2 - \lambda_2) x_2 = x_1 + e \Rightarrow$ (подставляя x_2 из первого уравнения во второе) $((2 - \lambda_1) \times (2 - \lambda_2) - 1) x_1 = e(3 - \lambda_2) \Rightarrow$ либо $x_1 = \pm e$, либо $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = -e$ Получаем с точностью до переобозначения экстремали: 1) $x_1 = x_2 = \pm e$; 2) $x_1 = -x_2 = e$; 3) $x_1 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $x_2 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

4. В силу компактности множества допустимых элементов по теореме Вейерштрасса решение существует. Максимум функционалу доставляет третья экстремаль

Ответ. Правильный треугольник.

2.45. Решение. 1. Пусть M — заданная точка, лежащая внутри угла AOB, точки C и D лежат на лучах OA и OB соответственно и $M \in [CD]$. Проведем через M прямую, параллельную OA; точку пересечения ее с OB обозначим через F. Пусть длина OF равна a, длина FD есть x. Легко подсчитать, что площадь треугольника OCD равна $k(a+x)^2/x$, где k — некоторый коэффициент пропорциональности. Рассмотрим задачу

$$S(x) = k\,\frac{(a+x)^2}{x} \to \inf; \quad x \geqslant 0.$$

Вследствие того, что $S(x)$ непрерывна и $S(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и $x \to 0$, решение $\hat{x}$ существует по теореме Вейерштрасса.

2. Необходимое условие — теорема Ферма: $S'(\hat{x}) = 0$.

3. $S'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \hat{x} = a$.

4. В силу единственности стационарной точки $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

Ответ. Искомая прямая обладает тем свойством, что ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делится заданной точкой пополам. (Способ построения: $|\widehat{D}O| = 2|OF|$)

2.46. Решение. 1. Пусть M — заданная точка, лежащая внутри угла AOB, точки C и D лежат на лучах OA и OB соответственно, $M \in [C, D]$ и величина угла CDB равна φ. Обозначим через $p(\varphi)$ периметр треугольника OCD. Рассмотрим задачу

$$p(\varphi) \to \inf; \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

где φ_0 — величина угла AOB.

Вследствие того, что p непрерывна и $p(\varphi) \to +\infty$ при $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi \to \pi$, решение $\widehat{\varphi}$ задачи существует по теореме Вейерштрасса. Кроме того, как нетрудно убедиться, функция p непрерывно дифференцируема. Мы не выписываем самой функции p, так как нам нужна лишь ее производная, а эту производную нетрудно вычислить, исследовав приращение $p(\varphi + d\varphi) - p(\varphi)$.

2. Необходимое условие — теорема Ферма: $p'(\widehat{\varphi}) = 0$.

3. Проверить, что

$$p'(\widehat{\varphi}) = l_1(1 + \cos\psi)/\sin\widehat{\varphi} - l_2(1 - \cos\widehat{\varphi})/\sin\widehat{\varphi},$$

где $l_1 = |\widehat{C}M|$, $l_2 = |\widehat{D}M|$, $\widehat{\psi}$ — это угол $O\widehat{C}\widehat{D}$ (рис. 6).

4. В силу единственности стационарной точки $\widehat{\varphi} \in \operatorname{abs\,min}$. Геометрический смысл соотношения $p'(\widehat{\varphi}) = 0$ состоит в следующем: перпендикуляр к $\widehat{C}\widehat{D}$, проведенный в точке M, пересекается с биссектрисами внешних углов $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ в одной точке O; иначе говоря, вневписанная окружность в треугольник $O\widehat{C}\widehat{D}$ проходит через точку M.

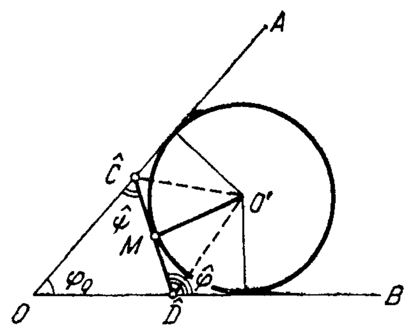

Рис. 6.

Ответ. Надо провести окружность через точку M (большего радиуса из двух возможных), касающуюся сторон угла, и затем провести отрезок $[\widehat{C}, \widehat{D}]$, касающийся этой окружности.

2.47. Площадь четырехугольника, вписанного в круг.

2.48. Решение. 1. Формализация: $V_1(R, h) = \pi h^2(R - h/3) \to \sup$; $2\pi Rh = a$, $0 \leqslant h \leqslant 2R$ (R — радиус шара, h — высота сегмента, a — заданная площадь боковой поверхности). Исключая R, приходим к задаче

$$V(h) = \frac{ha}{2} - \frac{\pi h^3}{3} \to \sup; \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

(последнее неравенство следует из того, что $h \leqslant 2R \Rightarrow a \geqslant \pi h^2$).

2. Необходимое условие — теорема Ферма: $V'(\hat{h}) = 0$.

3. $V'(\hat{h}) = 0 \Leftrightarrow \hat{h} = \sqrt{a/2\pi}$.

4. По теореме Вейерштрасса решение $\hat{h}$ задачи существует. Ясно, что $\hat{h} \neq 0$ и $\hat{h} \neq \sqrt{a/\pi}$, ибо $V(0) = 0$, а $V(\sqrt{a/\pi}) = a\sqrt{a}/6\sqrt{\pi} < V(\sqrt{a/2\pi}) = a\sqrt{a}/3\sqrt{2\pi}$. Значит, $a = 2\pi\hat{h}^2$; отсюда $\hat{h} = R$.

Ответ. Искомый шаровой сегмент — полушар.

2.49. Если точки лежат по разные стороны от прямой, то искомая точка есть пересечение прямой AB с данной. Пусть точки лежат по одну сторону от прямой. Отразим одну из них, например точку A, симметрично относительно заданной прямой. Получим точку A'. Пересечение прямой $A'B$ с заданной и есть искомая точка C. **2.50, 2.51.** Вершина тетраэдра должна проектироваться в центр круга, вписанного в основание. **2.52.** Правильный тетраэдр. **2.53.** $x_0 = (x_1 + x_2 + x_3)/3$ — центр тяжести треугольника x_1 x_2, x_3. **2.54.** $x_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$ — центр масс. **2.55.** Обозначим $\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$. Если $|\hat{x}| \leqslant 1$, то $x_0 = \hat{x}$; если $|\hat{x}| > 1$, то $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$. **2.56.** Обозначим $\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$. Если $\hat{x} = 0$, то x_0 — любое; если $\hat{x} \neq 0$, то $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$. **2.57.** Из точки с координатами (ξ_1, ξ_2) к эллипсу $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$ $(a_1 > a_2)$ можно провести четыре нормали, если эта точка лежит внутри астроиды $(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3}$; три нормали, если эта точка лежит на астроиде (за исключением вершин); две нормали в остальных случаях. **2.58.** Из точки с координатами (ξ_1, ξ_2) к параболе $y = ax^2$ $(a > 0)$ можно провести три нормали, если точка расположена выше кривой $\xi_2 = 3\cdot 2^{-4/3}a^{-1/3}\xi_1^{2/3} + 2^{-1}a^{-1}$; две нормали из точек на этой кривой, кроме точки $(0, 2^{-1}a^{-1})$; одну нормаль из точек ниже этой кривой и точки $(0, 2^{-1}a^{-1})$. **2.59.** Приведем ответ для гиперболы $\left(\dfrac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\dfrac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1$. Из точки с координатами (ξ_1, ξ_2) можно провести три нормали к ближайшей ветви гиперболы и одну к дальней, если $(\xi_1 a_1)^{2/3} - (\xi_2 a_2)^{2/3} > (a_1^2 + a_2^2)^{2/3}$; две нормали к ближайшей ветви и одну к дальней из точек (ξ_1, ξ_2), для которых последнее неравенство обращается в равенство, исключая точки $\left(0, \pm\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{a_1}\right)$; из всех остальных точек плоскости можно провести по одной нормали к каждой ветви гиперболы. **2.60.** Расстояние от точки $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ до гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ равняется $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \hat{x}_i - b\right| \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

2.61. Решение. 1. Пусть гиперплоскость задана уравнением $\langle a, x\rangle - b = 0$ ($\langle a, x\rangle$ — скалярное произведение векторов a и x). Рассмотрим экстремальную задачу

$$|x - x_0|^2 \to \inf;\ \langle a, x\rangle - b = 0\ (a \neq 0).$$

Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \frac{\lambda_0}{2}\left|x - x_0\right|^2 + \lambda\langle a, x\rangle$.

2. Необходимое условие: $\lambda_0(\hat{x} - x_0) + \lambda a = 0$.

3. Если $\lambda_0 = 0$, то $a = 0$ — противоречие. Полагаем $\lambda_0 = 1$; тогда $\hat{x} = x_0 - \lambda a$, $\lambda = (\langle a, x_0\rangle - b)/\langle a, a\rangle$.

4. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\hat{x} \in \operatorname{abs\,min},\ S_{\min} = (\langle a, x_0\rangle - b)/\langle a, a\rangle.$$

Искомое расстояние равно $|\langle a, x_0\rangle - b|/|a|$. Эта тема исследуется также в § 12.

2.62. Расстояние от точки $\hat{x}$ до прямой $at + b$, $a, b \in \mathbf{R}^n$, равняется $(|\hat{x} - b|^2 - (\langle\hat{x} - b, a\rangle/|a|)^2)^{1/2}$. **2.63.** $\hat{x} = -a/|a| \in \operatorname{abs\,min}$, $l(\hat{x}) = |a|$. **2.64.** Стороны прямоугольника: $\sqrt{2}a$, $\sqrt{2}b$. **2.65.** Стороны параллелепипеда: $2a/\sqrt{3}$, $2b/\sqrt{3}$, $2c/\sqrt{3}$. **2.66.** $(\pm a, 0, 0) \in \operatorname{abs\,max}$, если $a > b > c$.

2.67. Решение. 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \to \sup;\ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = a^q \quad (1 < p < q,\quad a > 0).$$

Множество допустимых элементов компактно, функционал непрерывен, значит, по теореме Вейерштрасса решение $\hat{x}$ задачи существует. Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q - a^q\right).$$

2. Необходимое условие — стационарность по x:

$$\widehat{\mathscr{L}}_{x_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 p\,|\hat{x}_i|^{p-1}\operatorname{sign}\hat{x}_i + \lambda q\,|\hat{x}_i|^{q-1}\operatorname{sign}\hat{x}_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

3. $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \overset{2.}{\Rightarrow} \hat{x} = 0$ не является допустимым элементом в задаче. Положим $\lambda_0 = -1 \overset{2.}{\Rightarrow}$ либо $\hat{x}_i = 0$, либо $|\hat{x}_i| = (\lambda q/p)^{1/(p-q)}$.

4. Максимум функционала достигается в критической точке. Пусть у критической точки отлично от нуля ровно k координат; тогда у этих координат $|\hat{x}_i| = ak^{-1/q}$. При этом

$$S_{\max}(a) = a^p \max_{1 \leqslant k \leqslant n} k^{1-p/q} = a^p n^{1-p/q}.$$

◁ Выведем из решения экстремальной задачи требуемое неравенство.

А) $p>1$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^q=a^q$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n\right)^{1/p}=n^{-1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\leqslant n^{-1/p}(S_{\max}(a))^{1/p}=$$

$$=n^{-1/p}an^{1/p-1/q}=an^{-1/q}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n\right)^{1/q}.$$

Б) $p=1$. Неравенство получается предельным переходом в неравенстве п. А).

В) $0<p<1$. Положим $y_i=|x_i|^p$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|/n\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{q/p}/n\right)^{p/q}\right)^{1/q}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n\right)^{1/q}.$$

Г) $p<q<0\Rightarrow 0<-q<-p\Rightarrow$ (А), Б), В))

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x^{-1}|^{-p}/n\right)^{-(-1/p)}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{-1}|^{-q}/n\right)^{-(-1/q)}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n\right)^{1/q}.$$

Д) Устремляя p к 0, получаем, что $\lim\limits_{p\to 0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p/n\right)^{1/p}=$ $=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}|x_i|\right)^{1/n}$, откуда, если $p<0<q$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n\right)^{1/p}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}|x_i|\right)^{1/n}\leqslant(|x_i|^q/n)^{1/q}. \quad \triangleright$$

2.68. Неравенство доказывается, как и в 2.67. **2.69.** Эта задача является частным случаем задачи 2.67. (см. п. Д)).

2.70. Решение. 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\to\sup;\quad \sum_{i=1}^{n}|x_i|^p=b^p\quad (p>1,\ a_i\in\mathbf{R},\ b>0).$$

Множество допустимых элементов компактно, функционал непрерывен, значит, по теореме Вейерштрасса решение задачи существует. Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\lambda_0\sum_{i=1}^{n}x_ia_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p.$$

2. Необходимое условие — стационарность по x:

$$\widehat{\mathscr{L}}_{x_i}=0\Leftrightarrow\lambda_0 a_i+\lambda p\,|\,\widehat{x}_i|^{p-1}\operatorname{sign}\widehat{x}_i=0,\quad i=1,\ldots,n.$$

3. $\lambda_0=0\Rightarrow\lambda\neq 0\Rightarrow\hat{x}=0$ не является допустимым элементом. Положим $\lambda_0=-1$. Тогда из п. 2 $\widehat{x}_i=\mu\,|\,a_i|^{p'-1}\operatorname{sign}a_i$, $1/p+1/p'=1$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n}|\,\widehat{x}_i|^p=b^p$, то $\mu=b\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\,a_i|^{p'}\right)^{-1/p}$.

4. Критическая точка единственна, значит, $\hat{x}\in\operatorname{abs}\max$, $S_{\max}(b)=b\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\,a_i|^{p'}\right)^{-1/p'}$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant S_{\max}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|\,x_i|^p\right)^{1/p}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\,x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|\,a_i|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Случаи $p=1$ и $p=+\infty$ получаются предельным переходом.

2.71. Решение выводится из экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n}|\,x_i+y_i|^p\to\sup;\quad\sum_{i=1}^{n}|\,x_i|^p=a^p,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\,y_i|^p=b^p\quad(p>1,\ a>0,\ b>0).$$

2.77. $-10{,}261$. 2.78. $4{,}49343$. 2.79. $1{,}045$.

К упражнениям § 3

13. Пусть f_1 и f_2 — функции на прямой, заданные равенствами $f_1(x)=|\,|x|-1|$, $f_2(x)=|x|$. Тогда

$$f_1^*(y)=\begin{cases}|\,y|, & |\,y|\leqslant 1,\\ \infty, & |\,y|>1;\end{cases}\qquad f_2^*(y)=\begin{cases}0, & |\,y|\leqslant 1,\\ \infty, & |\,y|>1;\end{cases}$$

$$(f_1+f_2)(x)=\begin{cases}1, & |\,x|\leqslant 1,\\ 2\,|\,x|-1, & |\,x|>1;\end{cases}$$

$$(f_1+f_2)^*(y)=\begin{cases}|\,y|-1, & |\,y|\leqslant 2,\\ \infty, & |\,y|>2.\end{cases}$$

С другой стороны,

$$\left(f_1^*+f_2^*\right)(y)=\begin{cases}0, & |\,y|\leqslant 1,\\ |\,y|-1, & 1\leqslant|\,y|\leqslant 2,\\ \infty, & |\,y|>2.\end{cases}$$

Таким образом, преобразование Лежандра — Юнга — Фенхеля суммы невыпуклых функций (функция f_1 невыпукла) может не совпадать с инфимальной конволюцией сопряженных функций, даже если исходные функции всюду непрерывны.

3.1. а) $a\geqslant 0$; б) $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, c — любое; в) $p\geqslant 1$; г) $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2\geqslant 0$ или $a_{11}=a_{12}=0$, $a_{22}\geqslant 0$. 3.2. а) да; б) да.

3.3. а) $f^*(y)=\begin{cases} y(\ln y-1), & y>0,\\ 0, & y=0,\\ +\infty, & y<0;\end{cases}$ б) $a<0\Rightarrow f^*(y)\equiv+\infty$; $a=0\Rightarrow f^*(y)=\delta\{b\}-c$; $a>0\Rightarrow f^*(y)=\dfrac{(y-b)^2}{4a}-c$; в) $p>1\Rightarrow f^*(y)=|y|^{p'}/p'$, $1/p+1/p'=1$; $p=1\Rightarrow f^*(y)=\delta[-1,1]$; $0<p<1\Rightarrow f^*(y)=\delta\{0\}$; г) $f^*(y)\equiv 0$; д) $f^*(y)=\max\{ay,by\}$; е) $f^*(y)=\begin{cases}+\infty, & y\geqslant 0,\\ -1-\ln(-y), & y<0.\end{cases}$

3.4. а) $\delta\{(a_1,a_2)\}-b$; б) $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0\Rightarrow f^*(y)=\langle A^{-1}y,y\rangle/4$; $a_{11}>0$, $a_{11}a_{12}-a_{12}^2=0$ или $a_{11}=a_{12}=0$, $a_{22}>0\Rightarrow f^*(y)=\begin{cases}\langle A^{-1}y,y\rangle/4, & y\in\operatorname{Im}A,\\ +\infty, & y\notin\operatorname{Im}A;\end{cases}$ $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0\Rightarrow f^*(y)=\delta\{0\}$; $f^*(y)=+\infty$ в остальных случаях, где $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$;

в) $f^*(y)=\begin{cases}\lambda(\ln\lambda-1), & (y_1,y_2)=\lambda(a_1,a_2),\ \lambda>0,\\ 0, & y=0,\\ +\infty & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$

г) $f^*(y)=\left(|a_1y_1|^{p'}+|a_2y_2|^{p'}\right)^{1/p'}$, $1/p'+1/p=1$;

д) $f^*(y)=\begin{cases}0, & y_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum\limits_{i=1}^n y_i=1,\\ +\infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

3.5. а) $f^{**}(x)\equiv 0$; б) $f^{**}(x)=\begin{cases}(x^2-1)^2, & |x|\geqslant 1,\\ 0, & |x|<1;\end{cases}$

в) $f^{**}(x)\equiv -1$; г) $f^{**}(x)\equiv 0$; д) $f^{**}(x)=|x|+|x-a|$;

е) $f^{**}(x)=\begin{cases}\big||x|-1\big|, & |x|\geqslant 1,\\ 0, & |x|<1.\end{cases}$

3.6. $f^*(x^*)=\begin{cases}0, & \langle x^*,x(\cdot)\rangle=\int\limits_0^1 x(t)\,d\mu(t), \text{ где } \mu(0)=0 \text{ и при этом } \mu(\cdot) \text{ — непрерывная справа (кроме, быть может, нуля), монотонно возрастающая функция вариации единица,}\\ +\infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

3.7. а) $|y_1|+|y_2|\leqslant 1$; б) $|y_1|^2+|y_2|^2\leqslant 1$; в) треугольник с вершинами $(-2,0)$, $(1\pm\sqrt{3})$; г) $B_{p'}=\left\{(y_1,y_2)\,\big|\,|y_1|^{p'}+|y_2|^{p'}\leqslant 1,\ 1/p+1/p'=1\right\}$; д) $(a_1y_1)^2+(a_2y_2)^2\leqslant 1$.

3.8. а) $[-1,1]$; б) $[0,1]$; в) $[-1,0]$.

3.9. а) $|y|\leqslant 1$; б) $\sum\limits_{i=1}^n|y_i|\leqslant 1$; в) $\sum\limits_{i=1}^n y_i\leqslant 1$, $y_i\geqslant 0$;

$t=1, \ldots, n$; г) $[0, a]$. **3.10.** $\{x^* \mid \langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int\limits_0^1 x(t)\, d\mu(t)$, где $\mu(0)=0$ и при этом $\mu(\cdot)$ — непрерывная справа, монотонно возрастающая функция (кроме, быть может, нуля) вариации единица$\}$. **3.11.** $B^* = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\|_{X^*} \leqslant 1\}$. **3.12.** а) $[-1, 1]$; б) $\{x^* \in C^*([0,1]) \mid \langle x^*, x(\cdot)\rangle = \mu_1 x(1/6) - \mu_2 x(1/2) + \mu_3 x(5/6),\quad \mu_i \geqslant 0, \mu_1+\mu_2+\mu_3=1\}$. **3.13.** $\max\{x_1 + \sqrt{3}\, x_2,\ x_1 - \sqrt{3}\, x_2,\ -2x_1\}$.
3.14. $(\mu A)^* = \delta A^0$.

$$\textbf{3.15.}\ f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ +\infty, & |x| > 1, \end{cases} \quad \widehat{x} = \pm 1.$$

3.16. Решение. Из неравенства Юнга и условия сразу следует, что $|x|^2/2 \leqslant f(x)$. Переходя к сопряженным функциям и пользуясь тем, что $\varphi \leqslant \psi \Rightarrow \varphi^* \geqslant \psi^*$, приходим к противоположному неравенству $f(x) \geqslant |x|^2/2$, откуда и следует требуемое.

3.17. Решение. Из условия сразу следует неравенство $\langle x, y\rangle \leqslant 1\ \forall x, y \in A$, откуда из однородности получаем $|x|^2 \leqslant \mu^2 A(x) \Rightarrow B \subset A$, где B — единичный шар. Переходя в последнем неравенстве к сопряженным функциям, приходим к противоположному включению.

$$\textbf{3.18.}\quad f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ \infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

3.19. $f(t) = e^{-t}$, $g(x) = x^2$, $f\,g = e^{-x^2}$. **3.20.** $f_1(x_1, x_2) = \delta A_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = \delta A_2(x_1, x_2)$, $A_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 x_2 \geqslant 1\}$, $A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 x_2 \leqslant -1\}$.

4.1. Решение. Эту задачу можно решить, раскрывая модуль. Но мы ее решим с помощью субдифференциалов.

1. Функция $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3|x+y-2|$ является выпуклой (в этом легко убедиться, используя критерий Сильвестра).

2. Необходимое и достаточное условие экстремума: $0 \in \partial f(x, y)$.

3. $0 \in \partial f(x, y) \Leftrightarrow (2x+y, 2y+x) + 3a = 0$,

где
$$a = \begin{cases} (1, 1), & x+y > 2, \\ -(1, 1), & x+y < 2, \\ [-(1,1), (1,1)], & x+y = 2. \end{cases}$$

Если $x+y > 2$, то $0 \in \partial f(x, y) \Leftrightarrow 2x+y+3=0,\ x+2y+3=0 \Rightarrow x+y=-2 \Rightarrow$ решений нет. Аналогично показываем, что в случае $x+y<2$ также стационарных точек нет. Если $x+y=2$, то $2x+y+3\alpha=0,\ 2y+x+3\alpha=0,\ \alpha \in [-1, 1] \Rightarrow x=y=1$, $\alpha=-1$ — единственная критическая точка.

Ответ. $(1, 1) \in \operatorname{abs\,min}$.

4.2. $(-1/2, -1/2) \in \operatorname{abs\,min}$. **4.3.** $a^2+b^2 \leqslant 1 \Rightarrow (a, b) \in \operatorname{abs\,min}$; $a^2+b^2 > 1 \Rightarrow (a/\sqrt{a^2+b^2},\ b/\sqrt{a^2+b^2}) \in \operatorname{abs\,min}$. **4.4.** $0 < \alpha \leqslant 1/2 \Rightarrow (\alpha, \alpha) \in \operatorname{abs\,min}$; $\alpha > 1/2 \Rightarrow (1/2, 1/2) \in \operatorname{abs\,min}$.

4.5. $\beta=\xi_3+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\leqslant 0\Rightarrow(0,\ 0,\ )\in 0\ \mathrm{abs\,min}$; $\beta>0\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\beta\xi_1\Big/\sqrt{2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)},\quad \beta\xi_2\Big/\sqrt{2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)},\quad \beta/\sqrt{2}\right)\in\mathrm{abs\,min}$.
4.6. $\widehat{x}_i=\xi_i a_i/\left(a_i^2+\lambda\right)$, $i=1,\ldots,n$, где λ — единственный положительный корень уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2a_i^2/\left(a_i^2+\lambda\right)^2=1$.

4.7. Решение. 1. Формализация:

$$\langle a,x\rangle\to\inf;\ \sum_{k=1}^{\infty}x_k^2/b_k^2=1\ \left(a\in l_2,\quad a\neq 0,\quad b_k\downarrow 0 \text{ при } k\to+\infty\right).$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\lambda_0\langle a,x\rangle+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2/b_k^2.$$

2. Необходимое условие: $\mathscr{L}_x=0\Leftrightarrow\lambda_0a_k+2\lambda x_k/b_k^2=0$, $k=1,2,\ldots$

3. Если $\lambda_0=0$, то $\lambda\neq 0$ и, следовательно, из п. 2 $x_k=0$, $k=1,2,\ldots$ Получили точку, не лежащую на границе эллипсоида. Положим далее $\lambda_0=2$; тогда $a_k+\lambda x_k/b_k^2=0\overset{a\neq 0}{\Rightarrow}\lambda\neq 0\Rightarrow x_k=-a_kb_k^2/\lambda$. $x\in$ границе эллипсоида $\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2b_k^2=\lambda^2\Rightarrow|\lambda|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2b_k^2}$.

4. Очевидно, что точка с координатами

$$\widehat{x}_k=-a_kb_k^2\Big/\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2b_k^2}$$

доставляет абсолютный минимум функционалу, а нормали возможны лишь в подпространстве $A^{-1}l_2$, где A: $\{x_k\}\to\{x_k/b_k^2\}$.

4.8. $S_{\min}=\|x_0-\widehat{\xi}\|$, где $\widehat{\xi}=\Lambda\hat{y}$, $\hat{y}=(\Lambda^*\Lambda+\lambda I)^{-1}\Lambda^*x_0$, λ — единственное положительное решение уравнения $\|(\Lambda^*\Lambda+\lambda I)\Lambda^*x_0\|=1$. 4.9. $t^2-1/2\in\mathrm{abs\,min}$. 4.10. Если возможно построение треугольника с длинами сторон m_1m_2, m_0m_1, m_0m_2 и α_1, α_2 — углы между сторонами с длинами m_1m_2, m_0m_1 и m_1m_2, m_0m_2 соответственно, то угол между векторами $\hat{x}_1$ и $e=(1,0)$ (вершины треугольника $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, e) равен $\pi-\alpha_1$, а угол между $\hat{x}_2$ и e равен $\pi-\alpha_2$. Если построение невозможно, то $\hat{x}_1=\hat{x}_2=-e$ или $\hat{x}_1=-e$, $\hat{x}_2=e$. 4.11. В остроугольном треугольнике искомыми точками являются основания высот. В прямоугольном и тупоугольном треугольниках треугольник минимального периметра вырождается в высоту, проведенную к большей стороне.

4.12. Решение. 1. Формализация:

$$f(x)=|x-x^1|+|x-x^2|+|x-x^3|\to\inf$$
$$\left(x^i=\left(x_1^i,x_2^i\right),\quad i=1,2,3,\quad x=\left(x_1,x_2\right)\right).$$

Получили выпуклую задачу без ограничений. В силу того, что $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$, из следствия теоремы Вейерштрасса следует, что решение задачи $\hat{x}$ существует.

2. Необходимое условие экстремума: $0 \in \partial f(\hat{x})$.

3. Возможно одно из двух: а) $\hat{x} \neq x^i$, $i = 1, 2, 3$; б) $\hat{x} \in \{x^1, x^2, x^3\}$. В случае а) $\partial f(\hat{x}) = \dfrac{\hat{x} - x^1}{|\hat{x} - x^1|} + \dfrac{\hat{x} - x^2}{|\hat{x} - x^2|} + \dfrac{\hat{x} - x^3}{|\hat{x} - x^3|} = 0$, т. е. три единичных вектора, направленные из $\hat{x}$ в x^1, x^2 и x^3, равны в сумме нулю. Отсюда вытекает, что из точки $\hat{x}$ отрезки $[x^1, x^2]$, $[x^1, x^3]$ и $[x^2, x^3]$ видны под углом 120°. Если все углы треугольника меньше 120°, то такую точку $\hat{x}$ легко построить. Ее называют *точкой Торичелли*. Рассмотрим случай б). Перенумеруем точки x^i так, чтобы $\hat{x} = x^1$. Из необходимого условия получим, что $n + (\hat{x} - x^2)/|\hat{x} - x^2| + (\hat{x} - x^3)/|\hat{x} - x^3| = 0$, где $n \in \partial|x|$ при $x = 0$, т. е. $|n| \leqslant 1$. Итак, сумма двух единичных векторов, направленных из x^1 в x^2 и x^3, в сумме с вектором, по модулю не превосходящим единицы, равна нулю. Отсюда следует, что угол $x^2x^1x^3$ больше или равен 120°.

4. Вследствие того, что условие $0 \in \partial f(\hat{x})$ является достаточным условием экстремума, приходим к такому ответу: если все углы треугольника меньше 120°, решением задачи является точка Торичелли; если один из углов треугольника больше или равен 120°, решение задачи совпадает с вершиной этого угла.

4.13. Если точки образуют выпуклый четырехугольник, то искомая точка — это точка пересечения диагоналей; если четырехугольник не является выпуклым, то искомая точка — вершина с максимальным углом. **4.14.** После формализации

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} m_i |x - x^i| \quad (m_i > 0, \quad i = 1, 2, 3)$$

следует применить необходимое и достаточное условие минимума $0 \in \partial f(\hat{x})$ (минимум, как нетрудно показать, существует). Расшифровка полученного условия приводит к следующему ответу: пусть существует треугольник с длинами сторон, равными m_1, m_2, m_3, и пусть α_{ij} — углы этого треугольника, образованные сторонами с длинами m_i и m_j. Проведем дуги окружностей, из которых отрезки $[x^i, x^j]$ видны под углами $\pi - \alpha_{ij}$ (соответственно). Если эти дуги пересекаются внутри треугольника, то построенная точка является искомой; если же дуги пересекаются вне треугольника или если не существует треугольника с длинами сторон m_1, m_2 и m_3, то решение задачи совпадает с одной из вершин треугольника. **4.15.** Центр многоугольника.

5.1. $\hat{x} \equiv 0$ — единственная экстремаль, и $\hat{x} \notin \operatorname{loc\,extr}$, $S_{\min} = -\infty$ $(x_n \equiv n)$, $S_{\max} = +\infty$. **5.2.** $\operatorname{ch} t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.3.** $e^t + \sin t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.4.** $\sin t + \cos t \notin \operatorname{loc\,extr}$, $S_{\min} = -\infty$ $(x_n \equiv n)$, $S_{\max} = +\infty$.

5.5. Решение. 1. $L = \dot{x}^2 + x^2$, $l = \alpha x^2(T_0)$.

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $\ddot{x} - x = 0$; б) трансверсальность: $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(T_0) = -\alpha x(T_0)$.

3. Общее решение уравнения Эйлера: $x = C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t$. Допустимые экстремали: $\hat{x}_1 \equiv 0$, α — любое, $\hat{x}_2 = C \operatorname{ch} t$ при $\alpha = -\operatorname{th} T_0$.

4. Рассмотрим условия второго порядка. Условие Лежандра $\left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}=2>0\right)$ выполнено; более того, интегрант регулярен. Нетрудно убедиться также в том, что выполнено усиленное условие Якоби. Проверим определенность квадратичной формы $Q+P$. Имеем $h_1=\operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T_0$, $h_0=\operatorname{sh}(T_0-t)/\operatorname{sh} T_0$. Матрица $Q+P$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2\operatorname{cth} T_0 & -2/\operatorname{sh} T_0 \\ -2/\operatorname{sh} T_0 & 2\alpha+2\operatorname{cth} T_0 \end{bmatrix}.$$

Из критерия Сильвестра следует, что матрица формы $Q+P$ положительно определена при $\alpha>-\operatorname{th} T_0$, неотрицательно определена при $\alpha=\operatorname{th} T_0$ и не является знакоопределенной при $\alpha<-\operatorname{th} T_0$.

Ответ. $\alpha>-\operatorname{th} T_0\Rightarrow\hat{x}\equiv 0\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\min}=0$; $\alpha=-\operatorname{th} T_0\Rightarrow$ $\Rightarrow C\operatorname{ch} t\in\operatorname{abs\,min}\ \forall C\in\mathbf{R}$, $S_{\min}=0$; $\alpha<-\operatorname{th} T_0\Rightarrow\hat{x}\equiv 0\notin\operatorname{loc\,min}$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n=n\operatorname{ch} t)$; $S_{\max}=+\infty\ \forall\alpha$.

5.6. $\hat{x}_1\equiv\hat{x}_2\equiv 0\notin\operatorname{loc\,extr}$, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. Указание. Воспользоваться теоремой Боголюбова. **5.7.** $\ln t+1\in$ $\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$.

5.8. $\hat{x}_1=\sqrt[6]{4t^3/3}$, $\hat{x}_2=\sqrt{t+1}$. 5.9. $2\ln(t+1)$. 5.10. $-e^t/(e^3+1)$. 5.11. $(1-t)\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.12. $\xi t/T_0\in$ $\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.13. $(t-t^2)/4\in\operatorname{abs\,max}$, $S_{\min}=-\infty$. 5.14. $-t^2/4+(\xi/T_0+T_0/4)\,t\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.15 $(t^3-$ $-t)/12\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.16. $(t-t^4)/24\in\operatorname{abs\,max}$, $S_{\min}=$ $=-\infty$. 5.17. $\hat{x}(t)=\xi t/T_0$ — единственная экстремаль, $\xi>0\Rightarrow$ $\Rightarrow\hat{x}\in\operatorname{loc\,min}$, $\xi<0\Rightarrow\hat{x}\in\operatorname{loc\,max}$, $\xi=0\Rightarrow\hat{x}\notin\operatorname{loc\,extr}$, $\forall\xi\ \hat{x}$ — не сильный loc extr, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. 5.18. $\hat{x}=(2t/3)^{3/2}$ — единственная экстремаль, $\hat{x}\in\operatorname{loc\,min}$, $\hat{x}$ — не сильный loc extr, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. 5.19. $\hat{x}=\xi t/T_0$ — единственная экстремаль, $\xi>T_0/3\Rightarrow\hat{x}\in\operatorname{loc\,min}$, $\xi<T_0/3\Rightarrow\hat{x}\in\operatorname{loc\,max}$, $\xi=T_0/3\Rightarrow$ $\Rightarrow\hat{x}\notin\operatorname{loc\,extr}$, $\forall\xi\ \hat{x}$ — не сильный loc extr, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=$ $=+\infty$. 5.20. $\hat{x}=\xi t/T_0$ — единственная экстремаль, $\xi>-T_0/3\Rightarrow$ $\Rightarrow\hat{x}\in\operatorname{loc\,min}$, $\xi<-T_0/3\Rightarrow\hat{x}\in\operatorname{loc\,max}$, $\xi=-T_0/3\Rightarrow\hat{x}\notin\operatorname{loc\,extr}$, $\forall\xi\ \hat{x}$ — не сильный экстремум, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. 5.21. $\ln t\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.22. $(\ln(t+1))/\ln 2\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.23. $t-e\ln t\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.24. $\dfrac{1+e}{2}\ln t+\dfrac{3-t}{2}\in\operatorname{abs\,max}$, $S_{\min}=-\infty$. 5.25. $4/t-1\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. 5.26. $(\ln(3(t-1)/(t+1)))/\ln(3/2)\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=$ $=+\infty$. 5.27. $e/t-\ln t\in\operatorname{abs\,max}$, $S_{\min}=-\infty$. 5.28. $\hat{x}=$ $=\sqrt{t+1}\in\operatorname{abs\,min}$, $S_{\max}=+\infty$. Указание. При доказательстве минимальности можно воспользоваться тем, что $(x\dot{x})^2=\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{x^2}{2}\right)^2$.

5.29. Решение. 1. $L = x/\dot{x}^2$.

2. Необходимое условие — уравнение Эйлера (интеграл энергии) $x/\dot{x}^2 = C$.

3. Общее решение уравнения Эйлера: $x = (C_1 t + C_2)^2$. Имеются две допустимые экстремали: $\hat{x}_1 = (t-1)^2$, $\hat{x}_2 = (t-2)^2/4$.

4. Вторая экстремаль окружена полем; поэтому $\hat{x}_2$ доставляет сильный локальный минимум. На первой экстремали не выполнено условие Якоби, ибо близкие экстремали пересекаются при $t = 1$. Значит, $\hat{x}_1 \notin \operatorname{loc\,extr}$. Из теоремы Боголюбова следует, что $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

5.30. $2\ln(t+1) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.31.** $t^3 - t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.32.** $\ln t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.33.** $t^3 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.34.** $\operatorname{ch} t/\operatorname{ch} 1 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.35.** $\operatorname{sh} 2t/\operatorname{sh} 2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.36.** $(e^t + e^{1-t})/(1+e) - 1 \in \operatorname{abs\,min}$. $S_{\max} = +\infty$. **5.37.** $(\operatorname{sh} t/2\operatorname{sh} 1) - t/2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.38.** $\sin t - \sin 1 \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} 1 \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. **5.39.** $\operatorname{sh} 2t - \operatorname{sh} 2 \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} 1 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.40.** $\sin t + (\xi - \sin T_0) \times \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T_0 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.41.** $\operatorname{sh} 2t + (\xi - \operatorname{sh} 2T_0) \times \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T_0 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.42.** $(t-1)\operatorname{ch} t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.43.** $t \operatorname{ch} t + (\xi - T_0 \operatorname{ch} T_0)\operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T_0 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = \infty$. **5.44.** $(t-1)\operatorname{sh} t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.45.** $((\xi/\operatorname{sh} T_0) - T_0 + t)\operatorname{sh} t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.46.** $\cos t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.47.** $\cos 2t \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. **5.48.** $\sin 2t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.49.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$; $\pi/2$ — сопряженная точка $\Rightarrow$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимая экстремаль $\sin 2t \notin \operatorname{loc\,extr}$. **5.50.** $\cos t + \sin t - 1 \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$, **5.51.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$; π — сопряженная точка $\Rightarrow$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимая экстремаль $\cos t - \sin t - 1 \notin \operatorname{loc\,extr}$. **5.52.** $(\pi \sin t - 2t)/4 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.53.** $\operatorname{sh} t - (\operatorname{sh} \pi/2)\sin t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.54.** $0 < T_0 < \pi \Rightarrow \operatorname{sh} t + \sin t\,(\xi - \operatorname{sh} T_0)/\sin T_0 \in \operatorname{abs\,min}$; π — сопряженная точка $\Rightarrow$ при $T_0 > \pi$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимые экстремали $\notin \operatorname{loc\,extr}$; $T_0 = \pi \Rightarrow$ при $\xi = \operatorname{sh}\pi$ $\hat{x} = \operatorname{sh} t + C\sin t \in \operatorname{abs\,min}$ $\forall C \in \mathbf{R}$, при $\xi \neq \operatorname{sh}\pi$ допустимых экстремалей нет и $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **5.55.** $\sin 2t \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. **5.56.** $0 < T_0 < \pi \Rightarrow \hat{x} = (\xi/\sin T_0 - 2\cos T_0)\sin t + \sin 2t \in \operatorname{abs\,min}$; π — сопряженная точка $\Rightarrow$ при $T_0 > \pi$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимые экстремали $\notin \operatorname{loc\,extr}$, $S_{\min} = -\infty$; $T_0 = \pi \Rightarrow$ при $\xi = 0$ $\hat{x} = \sin 2t + C\sin t \in \operatorname{abs\,min}$ $\forall C \in \mathbf{R}$, при $\xi \neq 0$ допустимых экстремалей нет и $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **5.57.** $t\cos t \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. **5.58.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$; π — сопряженная точка $\Rightarrow$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимая экстремаль $t\cos t \notin \operatorname{loc\,extr}$. **5.59.** $t\sin t - (\pi/2)\sin t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.60.** $t\sin t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.61.** π — сопряженная точка $\Rightarrow$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимая экстремаль $t\sin t \notin \operatorname{loc\,extr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **5.62.** $0 < T_0 < \pi \Rightarrow (\xi/\sin T_0 - T_0)\sin t + t\sin t \in \operatorname{abs\,min}$; π — сопряженная точка $\Rightarrow$ при $T_0 > \pi$ не выполнено необходимое условие Якоби $\Rightarrow$ допустимые экстремали не принадлежат $\operatorname{loc\,extr}$, $S_{\min} = -\infty$; $T_0 = \pi \Rightarrow$ при $\xi = 0$ $(t + C)\sin t \in \operatorname{abs\,min}$ $\forall C \in \mathbf{R}$, $S_{\min} = -\pi$; при $\xi \neq 0$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **5.63.** $e^t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.64.** $te^{2-t} \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. **5.65.** $t\xi e^{\frac{t-T_0}{T_0}} \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. **5.66.** $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +1$, $\hat{x} = \pi t/2 \in \operatorname{abs\,max}$. **5.67.** $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +1$, $\hat{x} = \pi t \in \operatorname{abs\,min}$. **5.68.** $S_{\min} = -T_0$,

$S_{\max} = +T_0$; $2k\pi < \xi/T_0 < \pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots \Rightarrow \hat{x} = \xi t/T_0 \in$ $\in$ loc max; $-\pi + 2k\pi < \xi/T_0 < 2k\pi$, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \hat{x} \in$ loc min, не выполнено необходимое условие Вейерштрасса $\Rightarrow$ в обоих случаях $\hat{x}$ — несильный loc extr; $T_0 = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$ требуется дополнительное исследование. **5.69.** $S_{\min} = -T_0$; $S_{\max} = +T_0$; $\pi/2 + 2k\pi < \xi T_0 < 3\pi/2 + 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots, \Rightarrow \hat{x} = \xi t/T_0 \in$ loc min; $-\pi/2 + 2k\pi < \xi/T_0 < \pi/2 + 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots \Rightarrow \hat{x} \in$ loc max; не выполнено необходимое условие Вейерштрасса $\Rightarrow$ в обоих случаях $\hat{x}$ — несильный loc extr; $T_0 = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, 1, \ldots \Rightarrow$ требуется дополнительное исследование. **5.70.** $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$; $T_0 > -\xi/2 \Rightarrow \hat{x} = \xi t/T_0 \in$ loc min; $T_0 < -\xi/2 \Rightarrow \hat{x} \in$ loc max; не выполнено необходимое условие Вейерштрасса $\Rightarrow$ в обоих случаях $\hat{x}$ — несильный loc extr; $T_0 = -\xi/2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ требуется дополнительное исследование. **5.71.** $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, $\xi \geqslant 4T_0^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_1 = 4\left((t+C)^{5/4} - C^{5/4}\right)/5 \in$ loc min, $\xi \leqslant -4T_0^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_2 = 4\left(C^{5/4} - (t+C)^{5/4}\right)/5 \in$ loc max, где C определяется из уравнения $4((T_0 + C)^{5/4} - C^{5/4})/5 = |\xi|$. Необходимое условие Вейерштрасса не выполнено, так что в обоих случаях $\hat{x}$ — несильный loc extr. При $|\xi| < 4T_0^{5/4}/5$ допустимых экстремалей нет.

5.72. Решение. 1. По теореме Боголюбова численное значение задачи совпадает с численным значением простейшей задачи с теми же краевыми условиями и интегрантом

$$\widetilde{L}(\dot{x}) = \begin{cases} 0, & |\dot{x}| \leqslant 1, \\ (\dot{x}^2 - 1)^2, & |\dot{x}| \geqslant 1. \end{cases}$$

2. Необходимое условие для интегранта $\widetilde{L}$ — уравнение Эйлера — имеет интеграл $\dot{x} = \mathrm{const}$.

3. Общее решение уравнения Эйлера: $x = C_1 t + C_2$.

4 Единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = \xi t$ доставляет abs min в новой задаче (возможна непосредственная проверка),

$$S_{\min} = \begin{cases} 0, & |\xi| \leqslant 1, \\ (\xi^2 - 1)^2, & |\xi| \geqslant 1. \end{cases}$$

В первоначальной задаче экстремаль ξt доставляет loc max при $|\xi| < 1/\sqrt{3}$ и loc min при $|\xi| > 1/\sqrt{3}$; при $|\xi| < 1$ эта экстремаль не доставляет сильного минимума, ибо условие Вейерштрасса не выполнено.

5.73. Краевым условиям удовлетворяет экстремаль $\hat{x} \equiv 0$. Но она не является решением задачи: по теореме Боголюбова $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. **5.74.** Краевым условиям удовлетворяет экстремаль $\hat{x} \equiv 0$. На этой экстремали выполнены достаточные условия слабого минимума, ибо поле $x(t, \lambda) \equiv \lambda$ окружает экстремаль и условие Лежандра выполнено: $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \equiv 2 > 0$. Необходимое условие Вейерштрасса также выполнено, ибо функция $\dot{x}^2 + 2tx^4$ выпукла. Сильного минимума, однако, нет. Достаточно взять ломаную $x(t;\ k, h) = kt/h$ при $0 \leqslant t \leqslant h$ и $k(1-t)/(1-h)$ при $h \leqslant t \leqslant 1$ и для любого $k > 0$ подобрать $h > 0$ так, что $J(x(\cdot, k, h)) < 0$ **5.75.** $\sqrt{1 - t^2} \in$ abs min, $S_{\max} = +\infty$. **5.76.** $\sqrt{2t - t^2} \in$ $\in$ abs min, $S_{\max} = +\infty$. **5.77.** Допустимая экстремаль — дуга окружности с центром на оси t, проходящая через точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1), доставляет abs min, $S_{\max}=+\infty$. Указание. В задачах 5.75—5.77 допустимую экстремаль легко включить в поле экстремалей, покрывающее полуполосу $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x>0$; интегрант регулярен. Основная формула Вейерштрасса приводит к тому, что допустимая экстремаль доставляет abs min.

5.78. Экстремали в задаче — цепные линии $x=C\operatorname{ch}(t+D)/C$. Константа D в задаче равна нулю, а константа C должна быть определена из уравнения $C\operatorname{ch} T_0/C$. Если теперь α определить из системы уравнений $\tau=\operatorname{cth}\tau$, $\alpha=\operatorname{sh}\tau$, то при $|\xi/T_0|>\alpha$ имеются две допустимые экстремали; при $|\xi/T_0|=\alpha$ имеется одна допустимая экстремаль; при $|\xi/T_0|<\alpha$ допустимых экстремалей нет. Подробное исследование задачи содержится в [13, с. 427]. 5.79. Экстремаль записывается в параметрической форме следующим образом: $x=\frac{a^2}{2}(1-\cos\tau)$, $t=\frac{a^2}{2}(\tau-\sin\tau)+c$. Константы a и c однозначно отыскиваются из начальных условий Допустимая экстремаль может быть включена в поле экстремалей, покрывающее полосу $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x>0$; интегрант квазирегулярен. Основная формула Вейерштрасса приводит к тому, что допустимая экстремаль доставляет abs min, $S_{\max}=+\infty$. 5.80. Экстремали, удовлетворяющие начальному условию $x(0)=0$, имеют вид $x(t,\alpha)=\alpha t+\frac{1+\alpha^2}{4h}t^2$. Уравнение огибающей этого семейства имеет вид $x=-h+t^2/(4h)$ (в баллистике эта кривая носит наименование кривой безопасности). Если точка (T_0, ξ) лежит вне кривой безопасности, допустимой экстремали нет; если эта точка лежит на кривой безопасности, допустимая экстремаль единственна; под кривой безопасности имеются две допустимые экстремали. При этом верхняя (навесная) экстремаль имеет пересечение с огибающей, т. е. сопряженную точку внутри $(0, T_0)$, и, значит, не дает сильного экстремума. Нижняя дает сильный минимум. Вопрос об abs min требует дополнительного исследования. 5.81. $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(\operatorname{sh}t, -\operatorname{sh}t)\in$ abs min, $S_{\max}=+\infty$. 5.82. $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(\operatorname{sh}t, \operatorname{sh}t)$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin\pi nt, -\sin\pi nt))$, $S_{\max}=+\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin\pi nt, \sin\pi nt))$. 5.83. $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(e^t, e^{-t})$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin\pi nt, -\sin\pi nt))$, $S_{\max}=+\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin\pi nt, \sin\pi nt))$. 5.84. $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(\sin t, -\sin t)$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin 2nt, -\sin 2nt))$, $S_{\max}=+\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin 2nt, \sin 2nt))$. 5.85. $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(t^4, t^3)$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin\pi nt, -\sin\pi nt))$, $S_{\max}=+\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(\sin\pi nt, \sin\pi nt))$. 5.86. $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)=(t+\cos t, -\cos t, \cos t-t)$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(0, -n\sin 2t, 0))$, $S_{\max}=+\infty$ $(x_n(t)=\hat{x}(t)+(0, n\sin 2t, 0))$. 5.87. $\hat{x}\equiv 1\in$ abs min, $S_{\max}=+\infty$. 5.88. $\alpha>-1 \Rightarrow \hat{x}\equiv 0\in$ abs min, $\alpha=-1\Rightarrow \hat{x}=Ct\in$ abs min $\forall C\in\mathbf{R}$, $S_{\min}=0$; $\alpha<-1\Rightarrow S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. 5.89. $\widehat{T}=1$, $\hat{x}=-2t\in$ abs min, $S_{\max}=+\infty$. 5.90. $\widehat{T}=1/2$, $\hat{x}=\pm 4t\in$ abs min, $S_{\max}=+\infty$. 5.91. $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$, $\hat{x}\equiv 0\notin$ loc extr. 5.92. $(t^2-1)/4\in$ abs min, $S_{\max}=+\infty$.

5.93. Решение. 1. Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\int_0^{T_0}\lambda_0\left(x-\dot{x}^2\right)dt+\lambda x(0).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $2\lambda_0\ddot{x}+\lambda_0=0$; б) трансверсальность: $-2\lambda_0\dot{x}(0)=\lambda$, $\lambda_0\dot{x}(T_0)=0$.

3. $\lambda_0=0\Rightarrow\lambda=0$ — допустимых экстремалей нет. Полагаем $\lambda_0=1$. Общее решение уравнения Эйлера: $x=-t^2/4+C_1t+C_2$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x}=t(2T_0-t)/4$.

4. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\hat{x}\in\operatorname{abs}\max$. Действительно, если $h(\cdot)\in C^1([0,T_0])$, $h(0)=0$, то

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))=\int_0^{T_0}h\,dt-\int_0^{T_0}2\dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt-\int_0^{T_0}\dot{h}^2dt=$$

$$=\int_0^{T_0}\left(2\ddot{\hat{x}}+1\right)h\,dt-2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^{T_0}-\int_0^{T_0}\dot{h}^2dt=-\int_0^{T_0}\dot{h}^2dt\leqslant 0.$$

Очевидно, что $S_{\min}=-\infty$.

5.94. $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=1-t,\ T_n=n)$, $S_{\max}=+\infty$. Допустимая экстремаль: $\hat{x}=t^2/4-t+1\ (\hat{T}=2)\notin\operatorname{loc\,extr}$. **5.95.** $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=(t^2-n^2)/4+n,\ T_n=n)$, $S_{\max}=+\infty$. Допустимая экстремаль: $\hat{x}=t^2/4-8\ (\hat{T}=8)\notin\operatorname{loc\,extr}$.

5.96. $S_{\min}=-\infty$

$$\left(x_n(t)=\begin{cases}-t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -1, & 1\leqslant t\leqslant n-1,\ T_n=n,\\ (\xi+1)(t-n+1)-1, & n-1\leqslant t\leqslant n\end{cases}\right).$$

Допустимая экстремаль: $\hat{x}=t^2/4$ $(\hat{T}=2\sqrt{\xi},\ \xi>0)\notin\operatorname{loc\,extr}$, $S_{\max}=+\infty$. **5.97.** $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=(t^2-nt)/4+t,\ T_n=n)$, $S_{\max}=+\infty$. Допустимая экстремаль: $\hat{x}=t^2/4-(1+\sqrt{5})t$ $(\hat{T}=8+4\sqrt{5})\notin\operatorname{loc\,extr}$. **5.98.** $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)=-t,\ T_n=n)$, $S_{\max}=+\infty$. Допустимая экстремаль: $\hat{x}=t^2/4-\sqrt{2}\,t$ $(\hat{T}=2\sqrt{2})\notin\operatorname{loc\,extr}$. **5.99.** $\cos t+\sin t\in\operatorname{abs}\min$, $S_{\max}=+\infty$. **5.100.** $S_{\max}=+\infty$, $T_0<\pi/2\Rightarrow\hat{x}\equiv 0\in\operatorname{abs}\min$, $T_0=\pi/2\Rightarrow A\sin t\in\operatorname{abs}\min$ $\forall A\in\mathbf{R}$; $S_{\min}=0$, $T_0>\pi/2\Rightarrow S_{\min}=-\infty$. **5.101.** $(t-\pi/4-1)\sin t\in\operatorname{abs}\min$, $S_{\max}=+\infty$. **5.102.** $(t-\pi/4+1)\cos t\in\operatorname{abs}\max$, $S_{\min}=-\infty$. **5.103.** $\dfrac{\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{ch}1}\in\operatorname{abs}\min$, $S_{\max}=+\infty$. **5.104.** $t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t(\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1)/\operatorname{ch}1\in\operatorname{abs}\min$, $S_{\max}=+\infty$. **5.105.** $t\operatorname{sh}t-\operatorname{th}1\operatorname{ch}t\in\operatorname{abs}\min$, $S_{\max}=+\infty$.

5.106. Решение. 1. Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\int_0^1\lambda_0\left(\dot{x}^2+x^2\right)dt-\lambda_0x^2(1)+\lambda(x(0)-1).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $\lambda_0(\ddot{x}-x)=0$; б) трансверсальность: $2\lambda_0\dot{x}(0)=\lambda$, $\lambda_0\dot{x}(1)=\lambda_0x(1)$.

3. $\lambda_0=0\overset{б)}{\Rightarrow}\lambda=0$ — допустимых экстремалей нет. Полагаем $\lambda_0=1$. Общее решение уравнения Эйлера: $x=C_1\operatorname{sh}t+C_2\operatorname{ch}t$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x}=\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t=e^t$.

4. Покажем, что $\hat{x}\in\operatorname{abs}\min$. Действительно, для квадратичного функционала легко проверить, что

$$J(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot))=J(\hat{x}(\cdot))+J(x(\cdot))\ \forall x(\cdot)\in C^1([0,1]),\quad x(0)=0.$$

Формула Вейерштрасса приводит к тождеству

$$\int_0^1 \left(\dot{x}^2 + x^2\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\dot{x} - x\operatorname{cth} t\right)^2 dt + \operatorname{cth} 1 x^2(1) \quad \forall x(\cdot) \in C^1([0, 1]),\ x(0) = 0.$$

Отсюда $J(x(\cdot)) \geqslant 0 \quad \forall x(\cdot) \in C^1([0, 1]),\ x(0) = 0$; поэтому $J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) \leqslant J(\hat{x}(\cdot))$. Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$.

5.107. Допустимых экстремалей нет. $S_{\min} = 1$ ($x_n = \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T$, $T_n = n$), $S_{\max} = +\infty$. 5.108. $\hat{x} = 2\operatorname{sh}\hat{T}\operatorname{ch} t$, $\hat{T}$ — единственное решение уравнения $\operatorname{sh} 2T + T = 1$. 5.109. $\hat{x} = -2\operatorname{ch}\hat{T}\operatorname{sh} t$, $\hat{T}$ — единственное решение уравнения $\operatorname{sh} 2T = T + 1$. 5.110. $\hat{x} = t/\sqrt{2}$, $\hat{T} = 2^{1/6}$. 5.111. $\hat{x} = \sqrt{2 - (t-1)^2}$. 5.112. $\hat{x} = \sqrt{2 - (t-1)^2}$, $\hat{T} = 2$.

5.113. Экстремали в задаче — цепные линии вида $C \operatorname{ch}\dfrac{t}{C}$. Пусть α определяется из уравнений $\alpha = \operatorname{sh}\tau$, $\tau = \operatorname{cth}\tau$. Тогда, если $|\xi| < \alpha T_0$, то экстремали нет, $|\xi| = \alpha T_0 \Rightarrow$ экстремаль одна, $|\xi| > \alpha T_0 \Rightarrow$ имеются две экстремали. 5.114. $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\dfrac{\cos t}{\cos 1}, \dfrac{\cos t}{\cos 1}\right)$. 5.115. $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\cos t + \operatorname{tg} 1 \sin t, \cos t + \operatorname{tg} 1 \sin t)$. 5.116. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0$. 5.117. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - x^2\right) = 0$. 5.118. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2\right) = 0$. 5.119. $\left(\dfrac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = x^{2p}$. 5.120. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{\partial S}{\partial x}\cdot\ln\dfrac{\partial S}{\partial x} - \dfrac{\partial S}{\partial x} = 0$. Указание. В задачах 5.121—5.125 следует искать решение уравнения Гамильтона—Якоби в виде $g(t) + f(x)$. 5.121. $C_1 + C_2 t$. 5.122. $C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t$. 5.123. $C_1 \sin t + C_2 \cos t$. 5.124. $t = \sqrt{C_1^2 - (x - C_2)^2}$.

$$5.125. \quad t - \alpha \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^{2p} - \alpha^2}} = \beta.$$

5.126. Решение. Уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = t^2 + x^2.$$

Ищем его решение в виде

$$S = \frac{1}{2}\left(t^2 \sin\alpha - 2tx\cos\alpha - x^2\sin\alpha\right).$$

Общий интеграл уравнения Эйлера согласно теореме Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\beta,$$

откуда получаем

$$t^2\cos\alpha + 2tx\sin\alpha - x^2\cos\alpha = \beta.$$

6.1. $3t^2 - 4t + 1 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.2. $3t^2 + 2t + 1 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.3. $(5t^3 - 3t)/2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.4. $5t^3 + 3t - 4 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.5. $60t^3 - 96t^2 + 36t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.6. $-10t^3 - 12t^2 + 6t + 2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.7. $\cos t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.8. $(t - 2\sin t)/\pi \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.9. $t + \sin t \in \operatorname{abs\,max}$, $t - \sin t \in \operatorname{abs\,min}$. 6.10. $2\sin t + \cos t + 1 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.11. $2e^{1-t} + 1 - t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 6.12. $2(1 - e^t)/(e^2 - 4e + 3) + (e-1)t/(e-3) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.13. Решение. 1. Лагранжиан: $L = \lambda_0(\dot{x}^2 + x^2) + \lambda x e^t$.

2. Уравнение Эйлера: $2\lambda_0(-\ddot{x} + x) + \lambda e^t = 0$.

3. $\lambda_0 = 0 \overset{2.}{\Rightarrow} \lambda = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Полагаем $\lambda_0 = 1/2 \overset{2.}{\Rightarrow} \ddot{x} - x = \lambda e^t$. Общее решение: $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 t e^t$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x} = te^t$.

4. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $te^t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.14. $te^{-t} \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.15. Решение. 1. Лагранжиан: $L = \lambda_0 t^2 \dot{x}^2 + \lambda t x$.

2. Уравнение Эйлера: $-\dfrac{d}{dt}\left(2\lambda_0 t^2 \dot{x}\right) + \lambda t = 0$.

3. $\lambda_0 = 0 \overset{2.}{\Rightarrow} \lambda = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Полагаем $\lambda_0 = 1/2 \overset{2.}{\Rightarrow} t^2\dot{x} = \lambda t^2/2 + C \Rightarrow \dot{x} = \lambda/2 + C/t^2$. Общее решение: $x = C_1 t + C_2/t + C_3$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x} = t$.

4. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $t \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.16. $4/t^2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.17. Решение. 1. Лагранжиан: $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda x^2$.

2. Уравнение Эйлера: $\lambda_0 \ddot{x} - \lambda x = 0$.

3. $\lambda_0 = 0 \overset{2.}{\Rightarrow} \lambda = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Полагаем $\lambda_0 = 1 \overset{2.}{\Rightarrow} \ddot{x} = \lambda x$. Общее решение: а) $\lambda > 0 \Rightarrow x = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, t}$; б) $\lambda = 0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$; в) $\lambda < 0 \Rightarrow x = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}\, t + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}\, t$. В случаях а) и б) допустимых экстремалей нет. В случае в) имеется бесконечное число допустимых экстремалей $\hat{x} = \sqrt{2}\sin k\pi t$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Абсолютный минимум доставляет функция $\hat{x} = \pm\sqrt{2}\sin\pi t$, что следует из тождества

$$\int_0^1 \left(\dot{x}^2 - \pi^2 x^2\right) dt = \int_0^1 \left(\dot{x} - \pi \operatorname{ctg} \pi t x\right)^2 dt$$

$$\forall x(\cdot) \in C^1([0, 1]), \quad x(0) = x(1) = 0,$$

являющегося следствием основной формулы Вейерштрасса. В справедливости тождества можно также убедиться непосредственной проверкой. $S_{\min} = \pi^2$, $S_{\max} = +\infty$, 6.18. $\frac{4}{\pi} t \sin t + C \sin t \, \forall C \in \mathbf{R}$. 6.19. $\frac{8}{\pi} t \cos t$.

6.20. Решение. 1. Лагранжиан: $L = \lambda_0 x + \lambda \sqrt{1 + \dot{x}^2}$.

2. Уравнение Эйлера: $-\frac{d}{dt} \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} + \lambda_0 = 0$.

3. $\lambda_0 = 0 \Rightarrow$ либо $\lambda = 0$ и тогда все множители Лагранжа — нули, либо $\dot{x} = \mathrm{const}$. Тогда из условий на концах и изопериметрического условия следует, что $\hat{x} \equiv 0$, $l = 2T_0$. $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = t + C_1 \Rightarrow \dot{x} = \frac{t + C_1}{\pm \sqrt{\lambda^2 - (t + C_1)^2}}$. Общее решение: $(t + C_1)^2 + (x + C_2)^2 = \lambda^2$. Из условий на концах следует, что $C_1 = 0$.

4. При $2T_0 < l \leqslant \pi T_0$ имеется единственная (с точностью до знака) экстремаль, являющаяся дугой длины l окружности, проходящей через точки $(\pm T_0, 0)$, с центром на оси x. При $l < 2T_0$ и $l > \pi T_0$ экстремалей нет.

6.21. $l < 2T_0$ — экстремалей нет, $l = 2T_0 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0$, $l > 2T_0 \Rightarrow \hat{x} = \pm C \left(\operatorname{ch} \frac{t}{C} - \operatorname{ch} \frac{T_0}{C} \right)$, где коэффициент $C > 0$ определяется единственным образом из уравнения $2C \operatorname{sh} \frac{T_0}{C} = l$. 6.22. $\hat{x}_1 = -6t^2 + 6t$, $\hat{x}_2 = 3t^2 - 2t$ — допустимая экстремаль, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. 6.23. $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = 5t^3/2 - 3t/2$ — допустимая экстремаль, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. 6.24. $\hat{x}^1 = (\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1) = (3t^2 - 2t, 3t^2 - 6t)$, $\hat{x}^2 = (\hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = (-3t^2 + 4t, -3t^2)$ — допустимые экстремали, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. 6.25. $\hat{x}^1 = (\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1) = (3t - t^3, t^3 - t)$, $\hat{x}^2 = (\hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = (t^3 + t, -t^3 + t)$ — допустимые экстремали, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

7.1. $3t^2 - 2t^3 \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.2. $t(t-1)^2 \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.3. $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.4. $t^4 \in \mathrm{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. 7.5. $t^2(t^3 - 2t + 1)/10 \in \mathrm{abs\,max}$, $S_{\min} = -\infty$. 7.6. $(t^5 + 3t^3 - 2t^2)/10 \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.7. $\operatorname{sh} t \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.8. $\operatorname{ch} t - \cos t \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.

7.9. Решение. 1. $L = \ddot{x}^2 - x^2$.

2. Необходимое условие — уравнение Эйлера — Пуассона $\overset{....}{x} - x = 0$.

3. Общее решение уравнения Эйлера — Пуассона: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 \operatorname{sh} t + C_4 \operatorname{ch} t$. Если $\operatorname{ch} T_0 \cos T_0 \neq 1$, то имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} \equiv 0$. Если $\operatorname{ch} T_0 \cos T_0 = 1$, то $\hat{x} = C((\operatorname{sh} T_0 - \sin T_0)(\operatorname{ch} t - \cos t) - (\operatorname{ch} T_0 - \cos T_0)(\operatorname{sh} t - \sin t))$.

4. Применим достаточные условия экстремума. Условие Лежандра $\left(\hat{L}_{\ddot{x}\ddot{x}}(t) = 2 > 0 \right)$ выполнено; более того, интегрант

регулярен. Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби совпадает в задаче с уравнением Эйлера — Пуассона. Положим

$$h_1 = \operatorname{ch} t - \cos t, \quad h_2 = \operatorname{sh} t - \sin t,$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ \dot h_1 & \dot h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} t - \cos t & \operatorname{sh} t - \sin t \\ \operatorname{sh} t + \sin t & \operatorname{ch} t - \cos t \end{bmatrix}.$$

Тогда $H(0) = 0$, $\ddot H(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ — невырожденная матрица. Сопряженные точки определяются соотношением

$$\det H(t) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{ch} t - \cos t)^2 - (\operatorname{sh}^2 t - \sin^2 t) = 0 \Leftrightarrow \cos t \operatorname{ch} = 1.$$

Ближайшая к нулю точка: $t_1 \in (3\pi/2, 2\pi)$.

Ответ. $T_0 \leqslant t_1 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 0$; $T_0 > t_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

7.10. $\operatorname{sh} t - \sin t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$.

7.11. $C_1 \operatorname{sh} t \sin t + C_2(\operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t \cos t) \in \text{abs min}$,

$$C_1 = \frac{2\xi_0 \operatorname{sh} T_0 \sin T_0 - \sqrt{2}\xi_1 (\operatorname{ch} T_0 \sin T_0 - \operatorname{sh} T_0 \cos T_0)}{\operatorname{sh}^2 T_0 - \sin^2 T_0},$$

$$C_2 = \frac{\xi_1 \operatorname{sh} T_0 \sin T_0 - \xi_0 (\operatorname{ch} T_0 \sin T_0 + \operatorname{sh} T_0 \cos T_0)}{\operatorname{sh}^2 T_0 - \sin^2 T_0};$$

$S_{\max} = +\infty$.

7.12. $-\operatorname{ch} t \cos t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.13. $-\sin t \operatorname{sh} t \in$ $\in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.14. $t + \cos t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.15. $(1 - \cos t)/2 \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.16. $\operatorname{ch} t \in \text{abs min}$, $S_{\max} =$ $= +\infty$. 7.17. $\operatorname{sh} t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.18. $\hat{x}(t) \equiv 0 \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.19. $te^t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.20. $e^t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.21. $t^2 \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.22. $\ln(t+1) \in$ $\in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.23. $t \ln t \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.24. $1/(t+1) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.25. $t^3 \in \text{abs min}$, $S_{\max} =$ $= +\infty$. 7.26. $t^4 \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 7.27. $\operatorname{sh} t \in \text{abs min}$, $S_{\max} =$ $= +\infty$. 7.28. $1 - \cos t$. 7.29. $t - \sin t$. 7.30. $\operatorname{sh} t - \sin t$.

8.1. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\operatorname{ch} t + C \operatorname{sh} t, 0) \in \text{abs min}\ \forall C \in \mathbf{R}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.2. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\operatorname{ch} t, 0) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.3. $(\hat{x}, \hat{u}) = (t \operatorname{ch} t,$ $2 \operatorname{sh} t) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.4. $(\hat{x}, \hat{u}) = (t \operatorname{sh} t, 2 \operatorname{ch} t) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.5. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\sin t + C \cos t, 0) \in \text{abs min}\ \forall C \in \mathbf{R}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.6. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\sin t, 0) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.7. $(\hat{x}, \hat{u}) = (t \cos t, -2 \sin t) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.8. $(\hat{x}, \hat{u}) =$ $= \left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t,\ 2\cos t\right) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.9. $(\hat{x}, \hat{u}) =$ $= (C \sin t, 0) \in \text{abs min}\ \ \forall C \in \mathbf{R}$, $S_{\max} = +\infty$. 8.10. $(\hat{x}, \hat{u}) =$ $= (\sin t, 0) \in \text{abs min}$, $S_{\max} = +\infty$.

8.11. $(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\frac{-2(t+2)\cos t}{4+\pi}, \frac{4 \sin t}{4+\pi}\right) \in \text{abs min}, S_{\max} = +\infty.$

8.12. $$(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\frac{(2t\pi + 4\pi)\cos t + (4t - 2\pi)\sin t}{4 - 4\pi - \pi^2},\right.$$
$$\left.\frac{8 \cos t - 4\pi \sin t}{4 - 4\pi - \pi^2}\right) \in \text{abs min}, \ S_{\max} = +\infty.$$

8.13. $(\hat{x}, \hat{u}) = (C \operatorname{ch} t, 0) \in \operatorname{abs\,min} \quad \forall C \in \mathbf{R}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.14. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\operatorname{ch} t, 0) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.15. $$(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\frac{3t \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} t + (t \operatorname{sh} 1 - t \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1) \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 2 + \operatorname{sh}^2 1 - 3}, \frac{6 \operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} t + 2(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1) \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} 2 + \operatorname{sh}^2 1 - 3}\right) \in \operatorname{abs\,min},\ S_{\max} = +\infty.$$
8.16. $$(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\frac{(4+2t)\sin t}{4+\pi}, \frac{4\cos t}{4+\pi}\right) \in \operatorname{abs\,min},\ S_{\max} = +\infty.$$
8.17. $$(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2}t + \operatorname{sh} \sqrt{2}t}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2} + \operatorname{sh} \sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2}t}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2} + \operatorname{sh} \sqrt{2}}\right) \in \operatorname{abs\,min},\ S_{\max} = +\infty.$$
8.18. $$(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{ch}(t-1) + \operatorname{sh}(t-1)}{\sqrt{2} \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1}, \frac{\operatorname{sh}(t-1)}{2 \operatorname{ch} 1 - \sqrt{2} \operatorname{sh} 1}\right) \in \operatorname{abs\,min},\ S_{\max} = +\infty.$$

8.19. $(\hat{x}, \hat{u}) \in \operatorname{abs\,min}$, где $\hat{x} = (C_1 t + C_2) \operatorname{ch} t + (C_3 t + C_4) \operatorname{sh} t$, $\hat{u} = \ddot{\hat{x}} + \sqrt{2}\,\dot{\hat{x}}$, неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из условий $x(0) = 1$, $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = \dot{\hat{u}}(1) = 0$; $S_{\max} = +\infty$.
8.20. $(\hat{x}, \hat{u}) \in \operatorname{abs\,min}$, где $\hat{x} = (C_1 t + C_2) \operatorname{ch} t + (C_3 t + C_4) \operatorname{sh} t$, $\hat{u} = \ddot{\hat{x}} - \sqrt{2}\,\dot{\hat{x}}$, неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из условий $x(0) = 1$, $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = \dot{\hat{u}}(1) = 0$; $S_{\max} = +\infty$. 8.21. $S_{\min} = 0$, $(\hat{x}, \hat{u}) = (\cos t - \operatorname{ctg} \widehat{T} \sin t, 0) \in \operatorname{abs\,min}$ $\forall \widehat{T} \neq k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$; $S_{\max} = +\infty$. 8.22. $(\hat{x}, \hat{u}) \in \left(\left(\frac{t}{4} + 1 - \frac{\pi}{8}\right) \sin t, \frac{1}{2} \cos t\right)$.

8.23. Решение. 1. Перейдем к полярным координатам $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$. Тогда $\dot{x} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi$, $\dot{y} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi$ и, следовательно, $\dot{x}y - \dot{y}x = r^2\dot{\varphi} = 1$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \dot{\varphi}$. Таким образом, получили стандартную задачу Лагранжа

$$\int_0^1 u^2 dt \to \operatorname{extr};$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}, \quad \dot{r} = u, \quad r(0) = r(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^1 \left(\lambda_0 u^2 + p_1\left(\dot{\varphi} - \frac{1}{r^2}\right) + p_2(\dot{r} - u)\right) dt + \lambda_1 r(0) + \lambda_2 r(1) + \lambda_3 \varphi(0) + \lambda_4 \varphi(1).$$

2. Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot r}+L_r=0,\ -\frac{d}{dt}L_{\dot\varphi}+L_\varphi=0\Rightarrow-\dot p_2+2p_1r^{-3}=0,$$

$$\dot p_1=0;$$

б) трансверсальность по r и φ:

$$p_1(0)=\lambda_3,\quad p_1(1)=-\lambda_4,\quad p_2(0)=\lambda_1,\quad p_2(1)=-\lambda_2;$$

в) стационарность по u: $2\lambda_0u-p_2=0$.

3. Если $\lambda_0=0$, то из условий п. 2 следует, что все множители Лагранжа — нули. Положим $\lambda_0=1/2$. Из условия стационарности по u и уравнений Эйлера получаем следующее дифференциальное уравнение: $\ddot r-C/r^3=0\Rightarrow\dot r\ddot r-C\dot r/r^3=0\Rightarrow\dot r^2+C/r^2=C'$. С другой стороны, $\ddot rr-C/r^2=0$. Отсюда $(r^2/2)^{\cdot\cdot}=\dot r^2+\ddot rr=C'$ и, следовательно, $r^2=C_1t^2+C_2t+C_3$. Из начальных условий находим $r^2=A(1-t)t+1$. Поэтому $\dot\varphi=\dfrac{1}{1+At(1-t)}$. Поскольку $\varphi(1)=$ $=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+At(1-t)}=1$, то $A=0$, значит, $\hat r(t)\equiv1$, $\hat\varphi(t)=t$.

Ответ. Единственная допустимая экстремаль: $\hat x=\sin t$, $\hat y=$ $=\cos t$.

9.1. $t^2\in\operatorname{loc}\min$, $-t^2\in\operatorname{loc}\max$, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.

9.2. Численное значение $S_{\min}=-1$ и достигается на последовательности функций

$$x_n(t)=\begin{cases}x_0+\varepsilon_1nt, & 0\leqslant t\leqslant\tau_{1n},\\ -t/2, & \tau_{1n}\leqslant t\leqslant\tau_{2n},\\ x_1+\varepsilon_2nt, & \tau_{2n}\leqslant t\leqslant1,\end{cases}$$

где $\varepsilon_i=1$ или $\varepsilon_i=-1$ в зависимости от x_0 и x_1, а τ_{in} — абсциссы точек пересечения прямых $x_0+\varepsilon_int$ и $-t/2$. 9.3. $\sqrt{a^2-t^2}\in$ $\in\operatorname{loc}\min$, $-\sqrt{a^2-t^2}\in\operatorname{loc}\max$, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. 9.4. $-\sqrt{2at}\in\operatorname{loc}\min$, $\sqrt{2at}\in\operatorname{loc}\max$, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$. Замечание. В задачах 9.1—9.4 loc min и loc max — это локальные минимум и максимум в пространстве C. 9.5. $S_{\min}=0$ достигается на последовательности $x_n(t)=\begin{cases}nt, & 0\leqslant t\leqslant1/n,\\ 1, & 1/n\leqslant t\leqslant1.\end{cases}$

9.6. $S_{\min}=0$ достигается на последовательности, подобной построенной в 9.5.

9.7. Решение. 1. Формализуем задачу как ляпуновскую:

$$\int_0^1\sqrt{t+h}\,\sqrt{1+u^2}\,dt\to\inf;\ \int_0^1u\,dt=\xi.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\int_0^1\left(\lambda_0\sqrt{t+h}\,\sqrt{1+u^2}-\lambda u\right)dt.$$

2. Необходимое условие:

$$\hat{x} \in \mathrm{abs\,min} \Rightarrow \inf_u \left(\lambda_0 \sqrt{t+h}\ \sqrt{1+u^2} - \lambda u\right) =$$
$$= \lambda_0 \sqrt{t+h}\ \sqrt{1+\hat{u}^2(t)} - \lambda \hat{u}(t).$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то из п. 2 следует, что $\lambda = 0$ — противоречие. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Далее решаем задачу

$$\sqrt{t+h}\,\sqrt{1+u^2} - \lambda u \to \inf.$$

Эта задача имеет решение, если $|\lambda| \leqslant \sqrt{h}$ и при этом $\hat{u}(t) = \lambda/\sqrt{t+h-\lambda^2}$. Если $\lambda = \sqrt{h}$, приходим к неравенству

$$\sqrt{t+h}\,\sqrt{1+u^2} - \sqrt{h}\,u \geqslant (t+h)/\sqrt{t} - \sqrt{h}\,\sqrt{h}/\sqrt{t}. \qquad (1)$$

Пусть теперь $x(\cdot)$ — любая допустимая функция при $\xi > 2\sqrt{h}$, $u = \dot{x}$. Интегрируя (1), получаем неравенство

$$J(x(\cdot)) \geqslant \sqrt{h}(\xi - 2\sqrt{h}) + J(2\sqrt{ht}). \qquad (2)$$

4. При $|\xi| \leqslant 2\sqrt{h}$ решением является

$$\hat{x}(t) = \lambda \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t+h-\lambda^2}},$$

где λ подобрано так, чтобы выполнялось условие

$$x(1) = \xi = 2\lambda(\sqrt{1+h-\lambda^2} - \sqrt{h^2-\lambda^2})$$

(при этом $|\lambda| \leqslant \sqrt{h}$). Если же $|\xi| > 2\sqrt{h}$, то значение задачи, как это сразу следует из (2), достигается на последовательности

$$x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_n, \\ \xi - 2\sqrt{h} + 2\sqrt{ht}, & \tau_n \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где τ_n — точка пересечения прямой $x = ht$ и кривой $x = \xi - 2\sqrt{h} + 2\sqrt{ht}$. Таким образом, можно сказать, что при $|\xi| > 2\sqrt{h}$ имеется обобщенное решение

$$\hat{x}(t) = \xi - 2\sqrt{h} + 2\sqrt{ht}.$$

9.8. Решение. 1. Формализуем задачу как ляпуновскую:

$$\int_0^1 u^2/2\,dt \to \inf; \quad \int_0^1 e^{-\tau}u(\tau)\,d\tau = \frac{\xi}{e}$$

(ибо $\dot{x} = x + u,\ x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)\,d\tau$).

2. Необходимое условие:

$$\inf(\lambda_0 u^2/2 - \lambda e^{-t}u) = \lambda_0 \hat{u}^2(t)/2 - \lambda e^{-t}\hat{u}(t).$$

3. Если $\lambda_0 = 0$, то из п. 2 следует, что $\lambda = 0$ — противоречие. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда $\hat{u}(t) = \lambda e^{-t}$,

$$\int_0^1 e^{-\tau}\hat{u}(\tau)\,d\tau = \xi/e \Rightarrow \lambda = \frac{\xi}{\operatorname{sh} 1}.$$

4. Вследствие того, что необходимое условие при $\lambda_0 \neq 0$ является достаточным, $\hat{u}(t) = \dfrac{\xi}{\operatorname{sh} 1} e^{-t} \in \operatorname{abs\,min}$.

9.9. $S_{\min} = 6\xi_1^2 - 6\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2$.

9.10. Решение. Задача сводится к следующей ляпуновской:

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha |u|^\beta}{\beta}\,dt \to \inf; \quad \int_0^1 u\,dt = \xi.$$

Значение этой задачи обозначим $S(\xi)$. Очевидно, что S определена и конечна на всей прямой. Применим метод двойственности. Имеем

$$S^*(\eta) \overset{\text{def}}{=} \sup_\xi (\xi\eta - S(\xi)) = \sup_\xi \left(\xi\eta - \inf\left\{ \int_0^1 \frac{t^\alpha |u|^\beta}{\beta} dt \,\middle|\, \int_0^1 u\,dt = \xi \right\} \right) =$$

$$= \sup_{u(\cdot)} \int_0^1 \left(u\eta - \frac{t^\alpha |u|^\beta}{\beta} \right) dt = \int_0^1 \sup_u \left(u\eta - \frac{t^\alpha |u|^\beta}{\beta} \right) dt =$$

$$= \frac{|\eta|^{\beta'}}{\beta'} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} dt, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1.$$

Таким образом,

$$S^*(\eta) = \begin{cases} \delta\{0\}, & \alpha \geqslant \beta - 1, \\ \dfrac{\beta - 1}{\beta - 1 - \alpha} \dfrac{|\eta|^{\beta'}}{\beta'}, & \alpha < \beta - 1, \end{cases}$$

откуда

$$S(\xi) = \sup_\eta (\xi\eta - S^*(\eta)) = \begin{cases} 0, & \alpha \geqslant \beta - 1, \\ \left(\dfrac{\beta - 1 - \alpha}{\beta - 1} \right)^{\beta - 1} \dfrac{|\xi|^\beta}{\beta}, & \alpha < \beta - 1. \end{cases}$$

В последнем случае решение задачи: $\hat{x}(t) = \xi t^{\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}}$.

$$9.11. \quad S_{\min} = \begin{cases} 0, & \varphi^{-1} \notin L_1([0, 1]), \\ \dfrac{\xi^2}{2} \displaystyle\int_0^1 \varphi^{-1}(t)\,dt, & \varphi^{-1} \in L_1([0, 1]). \end{cases}$$

9.12. Указание. Формализовав задачу следующим образом:

$$\int_0^1 \ddot{y}^2/2\,dt \to \inf;\quad y(0)=\dot{y}(0)=\dot{y}(1)=0,\quad y(1)=\xi$$

$$\left(y(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right),$$

сводим ее к 9.9. $S_{\min}=6\xi^2$.

9.13. Указание. Задача допускает естественную формализацию

$$\int_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \inf;\quad \int_0^1 x\,dt=\sigma,\quad x(0)=x(1)=0,\quad x\geqslant 0.$$

Нетрудно понять, что если решение $\hat{u}(\cdot)$ нижеследующей ляпуновской задачи

$$\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,dt \to \inf;\quad \int_0^1 u\,dt=0,\quad \int_0^1 (1-t)\,u\,dt=\sigma$$

окажется таковым, что $\hat{x}(t)=\int_0^t \hat{u}(\tau)\,d\tau\geqslant 0\ \forall t$, то $\hat{x}(\cdot)$ окажется решением задачи Дидоны, ибо

$$u=\ddot{y},\quad x=\dot{y}\Rightarrow\int_0^1 x\,dt=\sigma\Leftrightarrow\int_0^1 (1-t)\,u\,dt=\sigma,\quad \int_0^1 u\,dt=0,$$

$$x(0)=x(1)=0.$$

Далее следует применить рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным при решении задачи 9.7.

Ответ. При $\sigma\leqslant\pi/2$ решением является окружность с центром на прямой $t=1/2$; при $\sigma>\pi/2$ «обобщенным» решением является полуокружность $(t-1/2)^2+x^2=1/4$, $x\geqslant 0$, «приподнятая» на величину $(\sigma-\pi/2)/2$.

9.14. Решение. Докажем неравенство для $\mathbf{R}_+$ (для $\mathbf{R}$ все аналогично).

1. Рассмотрим ляпуновскую задачу

$$-\int_{\mathbf{R}_+} x\,dt \to \inf;\quad \int_{\mathbf{R}_+} x^2 dt=a^2,\quad \int_{\mathbf{R}_+} t^2x^2 dt=b^2\quad (a>0,\ b>0).$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}=\int_{\mathbf{R}_+}\left(-\lambda_0 x+\lambda_1 x^2+\lambda_2 t^2x^2\right)dt.$$

2. Необходимое условие экстремума:

$$\hat{x}\in\operatorname{abs}\min\ \Rightarrow -\lambda_0\hat{x}(t)+\lambda_1\hat{x}^2(t)+\lambda_2 t^2\widehat{x^2}(t)=$$
$$=\min_x\left(-\lambda_0 x+\lambda_1 x^2+\lambda_2 t^2x^2\right).\qquad(1)$$

3. $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0$ — противоречие. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из (1) получаем

$$\widehat{x}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a^{3/2} b^{3/2}}{b^2 + a^2 t} \in \text{abs min}$$

(в силу достаточности (1) при $\lambda_0 \neq 0$) и при этом $\int\limits_{\mathbf{R}_+} \widehat{x}(t)\, dt =$ $= (\hbar ab)^{1/2}$, откуда

$$\int\limits_{\mathbf{R}_+} x\, dt \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}_+} \widehat{x}\, dt = \sqrt{\pi}\sqrt{ab} = \sqrt{\pi}\left(\int\limits_{\mathbf{R}_+} x^2 dt\right)^{1/4} \left(\int\limits_{\mathbf{R}_+} t^2 x^2 dt\right)^{1/4},$$

что и требовалось.

9.15. Указание. Следует рассмотреть ляпуновскую задачу

$$\int\limits_0^1 u^2 dt \to \inf; \quad \int\limits_0^1 (\tau_k - \tau)_+ u(\tau)\, d\tau = \xi_k, \quad k = 1, \ldots, m,$$

доказать существование в ней решения (которое следует из слабой полунепрерывности снизу нормы и слабой компактности шаров в $L_2([0, 1])$) и применить необходимое условие в ляпуновской задаче.

Ответ. Решением является интерполяционный сплайн с условием $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, т. е. функция из C^2, являющаяся полиномом третьей степени в интервалах (τ_k, τ_{k+1}) и интерполирующая заданные значения.

9.16. Решение. 1. Рассмотрим ляпуновскую задачу

$$\int\limits_{\mathbf{R}} p(x) \ln p(x)\, dx \to \inf; \quad \int\limits_{\mathbf{R}} x^i p(x)\, dx = \alpha_i, \quad i = 0, 1, 2$$

$$(\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \sigma^2, \quad p \geqslant 0).$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\lambda_0 p \ln p + \lambda_1 p + \lambda_2 x p + \lambda_3 x^2 p\right) dx.$$

2. Необходимое условие:

$$\hat{p}(\cdot) \in \text{abs min} \Rightarrow \min_{p \geqslant 0} (\lambda_0 p \ln p + \lambda_1 p + \lambda_2 x p + \lambda_3 x^2 p) =$$
$$= \lambda_0 \hat{p}(x) \ln \hat{p}(x) + \lambda_1 \hat{p}(x) + \lambda_2 x \hat{p}(x) + \lambda_3 x^2 \hat{p}(x).$$

3. $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$,— противоречие. Полагаем

$$\lambda_0 = 1 \Rightarrow \left(p \ln p + \lambda_1 p + \lambda_2 x p + \lambda_3 x^2 p\right)'_{p = \widehat{p}(x)} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widehat{p}(x) = \exp\left(a + bx + cx^2\right),$$

причем $c < 0$ (иначе $\int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{p}\, dx = +\infty$). В итоге получаем

$$\hat{p}(x) = (1/2\pi\sigma)^{1/2} \exp(-x^2/(2\sigma))$$

(гауссова плотность).

4. В силу достаточности необходимых условий в ляпуновской задаче при $\lambda_0 \neq 0$ $\hat{p}(\cdot) \in \text{abs min}$.

10.1. $\hat{x} = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leqslant t \leqslant -\pi/2, \\ -t, & |t| < \pi/2, \\ t - \pi, & \pi/2 \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$ $\hat{x} \in \text{abs min}, -\hat{x} \in \text{abs max}$.

10.2. $\hat{x} = \begin{cases} -t, & t \leqslant \pi/4, \\ t - \pi/2, & t > \pi/4, \end{cases}$ $\hat{x} \in \text{abs min}, -\hat{x} \in \text{abs max}$.

10.3. Решение. 1. Формализация:

$$\int_0^{T_0} |u|\, dt \to \inf; \quad \dot{x} = u, \quad u \geqslant A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi \quad (A < 0).$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^{T_0} (\lambda_0 |u| + p(\dot{x} - u))\, dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (x(T_0) - \xi).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $\dot{p} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p = p_0 = \text{const}$; б) трансверсальность по x: $p(0) = \lambda_1$, $p(T_0) = -\lambda_2$; в) оптимальность по u: $\min\limits_{u \geqslant A} (\lambda_0 |u| - pu) =$ $= \lambda_0 |\hat{u}| - p\hat{u}$.

3. Если $\lambda_0 = 0$, то $p_0 \neq 0$ (иначе все множители Лагранжа — нули). Пусть $p_0 > 0$; тогда $\min\limits_{u \geqslant A} (-p_0 u) = -\infty$ и условие оптимальности по u невыполнимо. Если же $p_0 < 0$, то из в) следует, что $u \equiv A$, т. е. $x = At$, и, значит, допустимая экстремаль возможна лишь, если $\xi = AT_0$. При $\xi < AT_0$ нет ни одной допустимой функции. При $\xi > AT_0$ в случае $\lambda_0 = 0$ также нет допустимых экстремалей.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из условия оптимальности по u: если $p_0 > 1$, то условие в) невыполнимо; если $p_0 = 1$, то в качестве $\hat{u}(\cdot)$ можно взять любую неотрицательную функцию; если $-1 <$ $< p_0 < 1$, то $\hat{u} \equiv 0$; если $p_0 = -1$, то $\hat{u}(\cdot)$ — любая функция, удовлетворяющая неравенству $A \leqslant \hat{u}(t) \leqslant 0$; наконец, при $p_0 <$ < -1 $\hat{u} \equiv A$. Таким образом, для $\xi < AT_0$ допустимых функций нет; для $\xi = AT_0$ имеется единственная допустимая функция — экстремаль $\hat{x}(t) = At$; при $AT_0 < \xi < 0$ допустимой экстремалью служит любая монотонно убывающая допустимая функция; при $\xi = 0$ имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} \equiv 0$; наконец, если $\xi > 0$, то любая монотонно возрастающая функция является допустимой экстремалью.

4. Из соотношения $\int\limits_0^{T_0} \dot{x}\, dt = \xi$ следует неравенство $|\xi| \leqslant$ $\leqslant \int\limits_0^{T_0} |\dot{x}|\, dt$, обращающееся в равенство на любой допустимой экстремали. Значит, любая допустимая экстремаль доставляет abs min.

10.4. $\hat{x} = \begin{cases} t^2/4 - 3, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ t - 4, & 2 \leqslant t \leqslant 4, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$, $4 - t \in \operatorname{abs\,max}$.

10.5. $T_0 \leqslant 2 \Rightarrow \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{tT_0}{2} \in \operatorname{abs\,min}$;

$$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant T_0 - 2, \\ (t - T_0)^2/4 + 1 - T_0, & T_0 - 2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

$\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$, $t \in \operatorname{abs\,max}$.

10.6. $T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t + \xi, & 0 \leqslant t \leqslant T_0 - 2, \\ (t - T_0)^2/4 + 1 + \xi - T_0, & T_0 - 2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$

$\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$; $T_0 \leqslant 2 \Rightarrow \hat{x} = (t - T_0)^2/4 + \xi - T_0^2/4 \in$
$\in \operatorname{abs\,min}$, $t + \xi \in \operatorname{abs\,max}$.

10.7. $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) = \xi - t,\ \hat{T}_n = n)$, $S_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = \xi + t,\ \hat{T}_n = n)$. $\xi \leqslant 0 \Rightarrow$ допустимых экстремалей нет; $0 < \xi \leqslant 1 \Rightarrow \hat{x} = t^2/4 - \sqrt{\xi}t + \xi$ — допустимая экстремаль; $\hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\xi > 1 \Leftarrow$ допустимая экстремаль

$$\hat{x}_{\min} = \begin{cases} -t + \xi, & 0 \leqslant t \leqslant \xi - 1, \\ (t - \xi - 1)^2/4, & \xi - 1 \leqslant t \leqslant \hat{T}, \end{cases} \quad \hat{T} = 1 + \xi.$$

10.8. $T_0 \leqslant 2 \Rightarrow \hat{x} = t^2/4 + \xi - T_0^2/4 \in \operatorname{abs\,min}$;

$$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} t^2/4 + 1 + \xi - T_0, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ t + \xi - T_0, & 2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

$\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$, $-t + T_0 + \xi \in \operatorname{abs\,max}$.

10.9. $T_0 \leqslant 4 \Rightarrow \hat{x} = t(t - T_0)/4 \in \operatorname{abs\,min}$; $T_0 > 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant T_0/2 - 2, \\ (t - T_0/2)^2/4 + 1 - T_0/2, & T_0/2 - 2 \leqslant t \leqslant T_0/2 + 2, \\ t - T_0, & T_0/2 + 2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

$\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$; $\hat{x} = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant T_0/2, \\ T_0 - t, & T_0/2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,max}$.

10.10. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$; $\xi \leqslant 0 \Rightarrow$ допустимых экстремалей нет; $0 < \xi \leqslant 1 \Rightarrow$ допустимая экстремаль $\hat{x} = t^2/4$, $\hat{T} = 2\sqrt{\xi}$; $\xi > 1 \Rightarrow$ допустимая экстремаль

$$\hat{x}_{\min} = \begin{cases} t^2/4, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ t - 1, & 2 < t \leqslant \hat{T}, \end{cases} \quad \hat{T} = 1 + \xi.$$

10.11. $|\xi| \leqslant \operatorname{cth} T_0 \Rightarrow \hat{x} = \dfrac{\xi}{\operatorname{ch} T_0} \operatorname{ch}(t - T_0) \in \operatorname{abs\,min}$, $|\xi| >$
$> \operatorname{cth} T_0 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} \xi - t \operatorname{sign} \xi, & 0 \leqslant t \leqslant |\xi| - \sqrt{1 + C^2}, \\ C \operatorname{sign} \xi \operatorname{ch}(t - T_0), & |\xi| - \sqrt{1 + C^2} < t \leqslant T_0, \end{cases}$

$\hat{x} \in \text{abs min}$, где $C > 0$ — корень уравнения $C\,\text{sh}\,(|\xi| - \sqrt{1+C^2} - T_0) = -1$; $\xi + t \in \text{abs max}$. **10.12.** $-t^2 \in \text{abs min}$, $t^2 \in \text{abs max}$. **10.13.** $-(t-1)^2 \in \text{abs min}$, $(t-1)^2 \in \text{abs max}$. **10.14.** $t^2 - 2t \in \text{abs min}$, $2t - t^2 \in \text{abs max}$. **10.15.** $(t-2)^2 - 2 \in \text{abs min}$, $2 - (t-2)^2 \in \text{abs max}$. **10.16.** $t^2 - 2 \in \text{abs min}$, $2 - t^2 \in \text{abs max}$. **10.17.** $t^2 - t \in \text{abs min}$, $t - t^2 \in \text{abs max}$.

10.18. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 2 - \sqrt{2}, \\ t^2 - (8 - 4\sqrt{2})\,t + 12 - 8\sqrt{2}, & 2 - \sqrt{2} < t \leqslant 2, \end{cases}$

$\hat{x} \in \text{abs min}$, $-\hat{x} \in \text{abs max}$.

10.19. $\hat{x} = \begin{cases} t^2 - 2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -(t-2)^2, & 1 < t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \text{abs min}$, $-\hat{x} \in \text{abs max}$.

10.20. Решение. 1. Формализация:

$$\int_0^2 x_1\,dt \to \inf;$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leqslant 2, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^2 (\lambda_0 x_1 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u))\,dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$$

2. Необходимые условия: а) система уравнений Эйлера: $-\dot{p}_1 + \lambda_0 = 0$, $-\dot{p}_2 - p_1 = 0$; б) трансверсальность по x: $p_1(0) = \lambda_1$, $p_1(2) = 0$, $p_2(0) = \lambda_2$, $p_2(2) = -\lambda_3$; в) оптимальность по u: $\min\limits_{|u| \leqslant 2} -p_2 u = -p_2\hat{u}$.

3. Если $\lambda_0 = 0$, то из а) следует $p_1(t) \equiv \text{const} \overset{б)}{\Rightarrow} p_1(t) \equiv 0 \overset{а)}{\Rightarrow} \dot{p}_2(t) = 0 \Rightarrow p_2(t) \equiv \text{const} \neq 0 \overset{в)}{\Rightarrow} \hat{u}(t) \equiv \pm 2 \Rightarrow \hat{x} = \pm t^2 + C_1 t + C_2$. Из условий на концах вытекает, что в этом случае допустимых экстремалей нет. Положим $\lambda_0 = 1 \overset{а)}{\Rightarrow} p_1 = t + C' \overset{б)}{\Rightarrow} p_1 = t - 2 \overset{а)}{\Rightarrow} p_2 = -\dfrac{(t-2)^2}{2} + C$. Из условия оптимальности по u следует, что $\hat{u} = 2\,\text{sign}\,p_2$. Поскольку при $\hat{u} \equiv \text{const}$ допустимых экстремалей нет, то остается рассмотреть случай, когда управление $\hat{u}$ на отрезке $[0, 2]$ имеет переключение в некоторой точке τ. Из выражения для p_2 видно, что это может быть только в том случае, когда функция p_2 меняет знак в точке τ с минуса на плюс. Итак,

$$\hat{u} = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 2, & \tau < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Дважды интегрируя функцию $\hat{u}$, находим

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2 + C_1 t + C_2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ t^2 + C_3 t + C_4, & \tau \leqslant t \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Неизвестные константы и точка τ находятся из условий непрерывности $\dot{x}$ и x в точке τ и условий на концах.

4. Покажем с помощью непосредственной проверки, что $\hat{x} \in \in \operatorname{abs\,min}$. Возьмем функцию $x(\cdot)$ такую, что $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ является допустимой. Интегрированием по частям с использованием соотношений $\dot{p}(2) = 0$, $\ddot{p} = -1$, $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ $\left(p = p_2 = \frac{1}{2} - \frac{(t-2)^2}{2}\right)$ приходим к тождеству

$$\int_0^2 -p\ddot{x}\,dt = -p\dot{x}\Big|_0^2 + \dot{p}x\Big|_0^2 - \int_0^2 \ddot{p}x\,dt = \int_0^2 x\,dt,$$

откуда следует, что

$$J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^2 -p\ddot{x}\,dt \geqslant 0,$$

поскольку $p(t) \leqslant 0$; $\ddot{x}(t) \geqslant 0$ при $t \in [0, 1]$ и $p(t) \geqslant 0$, $\ddot{x}(t) \leqslant 0$ при $t \in [1, 2]$.

10.21. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ -(t-4)^2, & 3 \leqslant t \leqslant 4, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$, $-\hat{x} \in \operatorname{abs\,max}$.

10.22. $\left(\hat{x} = \begin{cases} -t^2 - 2t, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t^2 - 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \hat{T} = 1\right) \in \operatorname{abs\,min}$.

10.23. $\left(\hat{x} = \begin{cases} t^2 + 2t, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ -t^2 + 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \hat{T} = 1\right) \in \operatorname{abs\,min}$.

10.24. $\left(\hat{x} = \begin{cases} t^2 + 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -t^2 + 4t - 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases} \hat{T} = 2\right) \in \operatorname{abs\,min}$.

10.25. $\left(\hat{x} = \begin{cases} -t^2/2 + 1, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}, \\ (\sqrt{3}t - 4)^2/2 - 1, & \sqrt{3} \leqslant t \leqslant \hat{T}, \end{cases} \hat{T} = \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \in \operatorname{abs\,min}$.

10.26. $\left(\hat{x} = \begin{cases} -3t^2/2 + 3, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}, \\ (t - 8/\sqrt{3})^2/2 - 5, & 2/\sqrt{3} \leqslant t \leqslant 8\sqrt{3}, \end{cases} \hat{T} = \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \in \in \operatorname{abs\,min}$.

10.27. Синтез задачи изображен на рис. 7.

10.28. $\xi_2 \geqslant 0 \Rightarrow (\hat{x} = -t^2/2 + \xi_2 t + \xi_1,\ \hat{T} = \xi_2) \in \operatorname{abs\,min}$, $\xi_2 < < 0 \Rightarrow (\hat{x} = t^2/2 + \xi_2 t + \xi_1,\ \hat{T} = -\xi_2) \in \operatorname{abs\,min}$.

10.29. $\xi_1 > 0 \Rightarrow \left(\hat{x} = -t^2/2 + \xi_2 t + \xi_1,\ \hat{T} = \xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 + 2\xi_1}\right) \in \in \operatorname{abs\,min}$, $\xi_1 < 0 \Rightarrow \left(\hat{x} = t^2/2 + \xi_2 t + \xi_1,\ \hat{T} = -\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 2\xi_1}\right) \in \in \operatorname{abs\,min}$, $\xi_1 = 0 \Rightarrow \hat{T} = 0 \in \operatorname{abs\,min}$.

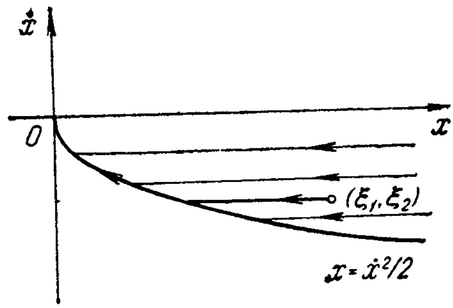

Рис. 7.

10.30. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -(t-1)^2, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.31. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -2t+1, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.32. $\hat{x} = \begin{cases} 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3-(t-2)^2, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.33. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (t-1)^2, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.34. $\hat{x} = \begin{cases} (t-1)^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.35. $\hat{x} = \begin{cases} 8t^3 - 18t + 11, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 12(t-1)^2, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.36. $\hat{x} = \begin{cases} -t^3 + 6t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3t^2 + 3t - 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.37. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ t^3/3 - t^2 + t/4 - 1/24, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ $\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.38. $t \in \operatorname{abs\,max}$, $-t \in \operatorname{abs\,min}$. 10.39. $T_0 < 2 \Rightarrow$ допустимых функций нет; $T_0 \geqslant 2 \Rightarrow \hat{x} = t\sqrt{2/T_0} \in \operatorname{abs\,max}$, $-\hat{x} \in \operatorname{abs\,min}$.

10.40. Решение. 1. Формализация:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2 + u^2}{2} + |u| \right) dt \to \operatorname{extr}; \quad \dot{x} = u, \quad x(1) = \xi.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^1 \left(\lambda_0 \left(\frac{x^2 + u^2}{2} + |u| \right) + p(\dot{x} - u) \right) dt + \lambda x(1).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $-\dot{p}+\lambda_0 x=0$; б) трансверсальность по x: $p(0)=0$, $p(1)=-\lambda$; в) оптимальность по u:

$$\min_{u\in\mathbf{R}}\left(\lambda_0\left(\frac{u^2}{2}+|u|\right)-pu\right)=\lambda_0\left(\frac{\hat{u}^2}{2}+|\hat{u}|\right)-p\hat{u}.$$

3. Если $\lambda_0=0 \overset{\text{в)}}{\Rightarrow} p\equiv 0 \overset{\text{б)}}{\Rightarrow} \lambda=0$, все множители Лагранжа — нули. Полагаем $\lambda_0=1$ в задаче на минимум $\overset{\text{в)}}{\Rightarrow}$

$$\overset{\text{в)}}{\Rightarrow}\hat{u}=\begin{cases}0, & |p|<1,\\ p-1, & p\geqslant 1,\\ p+1, & p\leqslant -1.\end{cases}$$

Поскольку $p(0)=0$, то $\hat{u}(t)=0$ при малых t. Значит, $\hat{x}(t)=C=$ $=\text{const}$, а из условий а) и б) $p(t)=Ct$ при этих t. При $t=$ $=1/|C|$ модуль $p(t)$ становится равным единице. Это точка переключения управления. Пусть $|p|\geqslant 1$; тогда $\dot{\hat{u}}=\dot{p}\overset{\text{а)}}{\Rightarrow}\ddot{x}-x=0$. Из непрерывности $\hat{u}=\dot{x}$ находим, что $x=C\operatorname{ch}(t-1/|C|)$. Константа C определяется из условия $x(1)=\xi$. Очевидно, что $S_{\max}=$ $=+\infty$.

4. Допустимая экстремаль: $|\xi|\leqslant 1\Rightarrow \hat{x}_{\min}=\xi$, $|\xi|>1\Rightarrow$

$$\hat{x}_{\min}=\begin{cases}C, & 0\leqslant t\leqslant 1/|C|,\\ C\operatorname{ch}(t-1/|C|), & 1/|C|\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

где C определяется из уравнения $C\operatorname{ch}(1-1/|C|)=\xi$. В силу выпуклости задачи $\hat{x}_{\min}\in\text{abs min}$.

10.41. Оптимальная траектория — окружность радиуса $T_0/(2\pi)$. Решение этой задачи и задач 10.42—10.45 см. в АТФ, с. 110. **10.42.** Оптимальная траектория — эллипс $(x^2+y^2)^{1/2}-\xi y=\text{const}$. **10.43.** Оптимальная траектория — эллипс $(x/b)^2+(y/a)^2=\mathbf{R}^2$. **10.44.** Оптимальная траектория — квадрат $|x|+|y|=\text{const}$. **10.45.** Оптимальная траектория — квадрат $|x|=\text{const}$, $|y|=\text{const}$. **10.46.** $\hat{x}=-\frac{p}{2}\left(\ln\frac{1}{u}+u^2+\frac{3}{4}u^4\right)+\frac{7}{8}p$, $t=-\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u}+2u+u^2\right)$, $p<0$,— кривая Ньютона. Решение см. в АТФ, с. 99. **10.47.** Допустимые экстремали: $\hat{x}_n(t)=\int\limits_0^t\operatorname{sign}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\tau\,d\tau$, $n=0$, ±1, ... При этом $\hat{x}_0\in\text{abs max}$.

11.1. $\hat{x}\equiv 1\in\text{abs min}$, $S_{\min}=0$, $S_{\max}=+\infty$. **11.2.** $\hat{x}=$ $=-(t^2+3)/4\notin\text{loc extr}$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)\equiv n)$, $S_{\max}=+\infty$. **11.3.** $|\xi|>1\Rightarrow$ допустимых функций нет. $|\xi|\leqslant 1\Rightarrow S_{\max}=1$ достигается на любой ломаной ($|\dot{x}(t)|=\pm 1$ вне точек излома), соединяющей точки $(0,\ 0)$ и $(1,\ \xi)$; $S_{\min}=\xi^2$, $\xi t\in\text{abs min}$. **11.4.** $(2tT_0-t^2)/4\in\text{abs min}$, $S_{\min}=-T_0^3/12$, $S_{\max}=+\infty$. **11.5.** $(tT_0-t^2)/4\in\text{abs min}$, $S_{\min}=-T_0^3/48$, $S_{\max}=+\infty$.

11.6. $T_0 \leqslant 2 \Rightarrow \widehat{x}_{\min} = (2tT_0 - t^2)/4 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = -T_0^3/12$; $T_0 > 2 \Rightarrow \widehat{x}_{\min} = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant T_0 - 2, \\ T_0 - 1 - (t - T_0)^2/4, & T_0 - 2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$

$\widehat{x}_{\min} \in \operatorname{abs\,min}$, $\widehat{x}_{\max} = -t \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = T_0 + T_0^2/2$.

11.7. $T_0 \leqslant 4 \Rightarrow \widehat{x}_{\min} = (tT_0 - t^2)/4 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = -T_0^3/48$;

$$T_0 > 4 \Rightarrow \widehat{x}_{\min} = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant T_0/2 - 2, \\ T_0/2 - 1 - (t - T_0/2)^2/4, & T_0/2 - 2 \leqslant t \leqslant T_0/2 + 2, \\ T_0 - t, & T_0/2 + 2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

$\widehat{x}_{\min} \in \operatorname{abs\,min}$, $\widehat{x}_{\max} = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant T_0/2, \\ t - T_0, & T_0/2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$

$\widehat{x}_{\max} \in \operatorname{abs\,max}$, $S_{\max} = T_0 + T_0^2/4$.

11.8. Допустимых экстремалей нет. $S_{\min} = -\infty$ $(x(t) = t \Rightarrow J(x(\cdot), T) = T - T^2/2 \to -\infty$ при $T \to +\infty$ или $x(t) = \hat{x}_{\min}(t)$ — допустимая экстремаль из ответа к задаче 11.6). $S_{\max} = +\infty$ $(\hat{x}(t) = -t \Rightarrow J(x(\cdot), T) = T + T^2/2 \to +\infty$ при $T \to +\infty)$.

11.9. Допустимых экстремалей нет. $S_{\min} = -\infty$ $\left(x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant T/2, \\ T - t, & T/2 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \Rightarrow J(x(\cdot), T) = T - T^2/4 \right.$ или $x(t) = \hat{x}(t)$ — допустимая экстремаль из ответа к задаче 11.7 $\Rightarrow J(x(\cdot), T) \to -\infty$ при $T \to +\infty$). $S_{\max} = +\infty$

$\left(x(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant T/2, \\ t - T, & T/2 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \Rightarrow J(x(\cdot), T) = T + T^2/4 \to +\infty \text{ при } T \to +\infty\right)$.

11.10. $\hat{x} \equiv 1 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$ $\left(x_n(t) = \frac{\pi}{2}(2n+1) \sin \pi (2n+1) t\right)$. **11.11.** $3t - 3t^2/2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 3$, $S_{\max} = +\infty$ $\left(x_n(t) = \frac{\pi}{2}(2n+1) \sin \pi (2n+1) t\right)$. **11.12.** $6t - 6t^2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 12$, $S_{\max} = +\infty$ $\left(x_n(t) = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) \sin \pi \times (2n+1) t\right)$. **11.13.** $15t/4 - 5t^3/4 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 15/2$, $S_{\max} = +\infty$. **11.14.** $15(t - t^3)/2 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 45$, $S_{\max} = +\infty$. **11.15.** $S_{\max} = +\infty$, $5t^3/8 - 15t/8 + 1 \in \operatorname{abs\,min}$. $S_{\min} = 15/8$. **11.6.** $S_{\max} = +\infty$, $-20t^3/3 + 14t^2 - 8t + 1 \in \operatorname{abs\,min}$. $S_{\min} = 8$. **11.17.** $S_{\max} = +\infty$, $20t^3/3 - 6t^2 + 1/3 \in \operatorname{abs\,min}$. $S_{\min} = 8$. **11.18.** $S_{\max} = +\infty$, $10t^3 - 12t^2 + 3t \in \operatorname{abs\,min}$. **11.19.** $\hat{x}(t) \equiv 3$ $(\hat{T} = 1/3) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$; имеется еще одна допустимая экстремаль $3(t-1)^2$ $(\hat{T} = 1)$. **11.20.** $\hat{x}(t) \equiv 1$ $(\hat{T} = 1/3) \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\max} = +\infty$; имеется еще одна допустимая экстремаль t^2 $(\hat{T} = 1)$. **11.21.** $S_{\max} = +\infty$, $2(t + \sin t)/(3\pi) \in \operatorname{abs\,min}$. **11.22.** $S_{\max} = +\infty$, $\frac{2}{\pi} \sin t \in \operatorname{abs\,min}$,

11.23. $S_{\max} = +\infty$, $\dfrac{8}{16 - 3\pi^2}\left(1 - \cos t - \dfrac{\pi}{4}(t + \sin t)\right) \in \operatorname{abs\,min}$.

11.24. $S_{\max} = +\infty$, $\cos t - 1 \in \operatorname{abs\,min}$. **11.25.** $S_{\max} = +\infty$,

$2(e^t-et-1)/(e^2-4e+1)\in\text{abs min}$. **11.26.** $S_{\max}=+\infty$, $2(te-t-e^t+1)/((3-e)(e-1))\in\text{abs min}$. **11.27.** $S_{\max}=+\infty$, $\ln(t+1)-1\in\text{abs min}$. **11.28.** $S_{\max}=+\infty$, $1/t+1/2\in\text{abs min}$. **11.29.** $S_{\max}=+\infty$, $t-e\ln t-1\in\text{abs min}$. **11.30.** $S_{\max}=+\infty$, $t+(1-e)\ln t-1\in\text{abs min}$. **11.31.** $S_{\max}=+\infty$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n(t)\equiv n)$, $\hat{x}=\cos t-1\notin\text{loc extr}$. **11.32.** $S_{\max}=+\infty$, $\dfrac{\xi\,\text{ch}\,t}{\text{ch}\,T_0}\in\text{abs min}$, $S_{\min}=\xi^2\,\text{th}\,T_0$. **11.33.** $\xi=0\Rightarrow\hat{x}(t)\equiv0$ ($\hat{T}>0$ — любое) $\in\text{abs min}$; $\xi\neq0\Rightarrow$ допустимых экстремалей нет.

$$S_{\min}=0\ \left(x(t)=\frac{\xi\,\text{ch}\,t}{\text{ch}\,T}\Rightarrow J(x(\cdot),T)=\xi^2\,\text{th}\,T\to0\quad\text{при } T\to0\right),$$

$$S_{\max}=+\infty\quad\left(x(t)\equiv\xi\Rightarrow J(x(\cdot),T)=\xi^2T\to+\infty\ \text{при}\ T\to\infty\right).$$

11.34. $|\xi|\leqslant\text{cth}\,T_0\Rightarrow\hat{x}=\dfrac{\xi\,\text{ch}\,T}{\text{ch}\,T_0}\in\text{abs min}$; $|\xi|>\text{cth}\,T_0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\hat{x}=\begin{cases}\text{sign}\,\xi\,\dfrac{\text{ch}\,t}{\text{sh}\,\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ \xi+(t-T_0)\,\text{sign}\,\xi, & \tau\leqslant t\leqslant T_0,\end{cases}$$

$\hat{x}\in\text{abs min}$, где τ отыскивается из уравнения $|\xi|=\text{cth}\,\tau-\tau+T_0$. $\hat{x}=\xi-(t-T_0)\,\text{sign}\,\xi\in\text{abs max}$. **11.35.** $\xi=0\Rightarrow\hat{x}(t)\equiv0$ ($\hat{T}>0$ — любое) $\in\text{abs min}$; $\xi\neq0\Rightarrow$ допустимых экстремалей нет. $S_{\min}=0$, $S_{\max}=+\infty$, $(x(t)\equiv\xi\Rightarrow J(x(\cdot),T)=\xi^2T\to0$ при $T\to0$ и $J(x(\cdot),T)\to+\infty$ при $T\to+\infty)$. **11.36.** $(\xi\,\text{sh}\,t)/\text{sh}\,T_0\in\text{abs min}$. $S_{\min}=\xi^2\,\text{cth}\,T_0$, $S_{\max}=+\infty$. **11.37.** $\xi=0\Rightarrow\hat{x}(t)\equiv0$ ($\hat{T}>0$ — любое) $\in\text{abs min}$; $\xi\neq0\Rightarrow$ допустимых экстремалей нет. $S_{\min}=\xi^2$, $S_{\max}=+\infty$ $(x(t)=(\xi\,\text{sh}\,t)/\text{sh}\,T\Rightarrow J(x(\cdot),T)=\xi^2\,\text{cth}\,T\to\xi^2$ при $T\to+\infty$ и $J(x(\cdot),T)\to+\infty$ при $T\to+0)$.

11.38. $|\xi|>T_0\Rightarrow$ допустимых функций нет. $|\xi|\leqslant\text{th}\,T_0\Rightarrow\dfrac{\xi\,\text{sh}\,t}{\text{sh}\,T_0}\in\text{abs min}$, $S_{\min}=\xi^2\,\text{cth}\,T_0$, $\text{th}\,T_0<|\xi|\leqslant T_0\Rightarrow\hat{x}_{\min}=$

$$=\begin{cases}\dfrac{\text{sh}\,t}{\text{ch}\,\tau}\,\text{sign}\,\xi, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ \xi+(t-T_0)\,\text{sign}\,\xi, & \tau\leqslant t\leqslant T_0\end{cases}$$

(τ — корень уравнения $T_0+\text{th}\,\tau-\tau=|\xi|$), $\hat{x}_{\min}\in\text{abs min}$, $S_{\min}=|\xi|+\dfrac{|\xi|^3}{3}-\dfrac{\text{th}^3\,\tau}{3}$, $\hat{x}_{\max}=$

$$=\begin{cases}t\,\text{sign}\,\xi, & 0\leqslant t\leqslant(T_0+\xi)/2,\\ \xi+(T_0-t)\,\text{sign}\,\xi, & (T_0+\xi)/2\leqslant t\leqslant T_0,\end{cases}$$

$\hat{x}_{\max}\in\text{abs max}$.

11.39. $\xi=0\Rightarrow\hat{x}(t)\equiv0$ ($\hat{T}>0$ — любое) $\in\text{abs min}$; $\xi\neq0\Rightarrow$ допустимых экстремалей нет. $|\xi|<1\Rightarrow S_{\min}=\xi^2$, $x=\dfrac{\xi\,\text{sh}\,t}{\text{sh}\,T}\Rightarrow J(x(\cdot),T)=\xi^2\,\text{cth}\,T\to\xi^2$ при $T\to+\infty$; $|\xi|\geqslant1\Rightarrow S_{\min}=|\xi|^3/3+|\xi|-1/3$, $x(t)=\hat{x}_{\min}(t)$ из ответа к задаче 11.38 $\Rightarrow J(x(\cdot),T)\to S_{\min}$ при $T\to+\infty$. $S_{\max}=+\infty$ $(x(t)=\xi t/T\Rightarrow J(x(\cdot),T)=\xi^2/T+\xi^2T/3\to+\infty$ при $T\to+\infty)$.

11.40. $$\hat{x}=\pm\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ -\dfrac{\cos t}{\sin\tau}, & \tau\leqslant t\leqslant\pi\end{cases}$$ (τ — решение уравнения $\tau\,\text{tg}\,\tau=-1$), $\hat{x}_{\min}\in\text{abs min}$, $S_{\min}=-\tau^3/3$, $S_{\max}=\pi$.

11.41. $\sin t \in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.

$$\textbf{11.42.}\ \hat{x} = \pm \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -\dfrac{\cos(t - 3\pi/4)}{\sin(\tau - 3\pi/4)}, & \tau \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2} - \tau, \\ 3\pi/2 - t, & 3\pi/2 - \tau \leqslant t \leqslant 3\pi/2 \end{cases}$$

(τ — корень уравнения $3\pi/2 = 2\tau + 2\,\mathrm{arctg}\,\tau^{-1}$) $\in \mathrm{abs\,min}$, $S_{\min} = -2\tau^3/3$, $S_{\max} = 3\pi/2$.

11.43. $T_0 < \pi \Rightarrow \dfrac{\xi - T_0 \cos T_0}{\sin T_0} \sin t + t \cos t \in \mathrm{abs\,min}$; $T_0 = \pi \Rightarrow$ $\Rightarrow$ при $\xi = -\pi$ $t \cos t + C \sin t \in \mathrm{abs\,min}$ $\forall C \in \mathbf{R}$; $T_0 > \pi \Rightarrow$ допустимые экстремали $\notin \mathrm{loc\,extr}$ и $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.

11.44. Решение. 1. Формализация:

$$\int_0^{T_0} (u^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x} = u,\ u \in [-1, 1],\ x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^{T_0} \left(\lambda_0 (u^2 - x^2) + p\left(\dot{x} - u\right)\right) dt + \lambda x(0).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $-\dot{p} - 2\lambda_0 x = 0$; б) трансверсальность по x: $p(0) = \lambda$, $p(T_0) = 0$; в) оптимальность по u: $\min\limits_{|u| \leqslant 1} (\lambda_0 u^2 - pu) = \lambda_0 \hat{u}^2 - p\hat{u}$ ($\lambda_0 \geqslant 0$ в задаче на минимум, $\lambda_0 \leqslant 0$ в задаче на максимум).

3. Если $\lambda_0 = 0$, то все множители Лагранжа из-за необходимых условий п. 2 равны нулю. Положим $\lambda_0 = 1/2$ в задаче на минимум. Тогда из условия оптимальности по u

$$\hat{u} = \begin{cases} \operatorname{sign} p, & |p| > 1, \\ p, & |p| \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим поведение экстремальных траекторий на плоскости x, p (рис. 8).

I. $|p| \leqslant 1 \Rightarrow \dot{p} = -x$, $\dot{x} = p \Rightarrow p\dot{p} + x\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{p}^2 + \dot{x}^2 = C$.

Движение происходит по окружностям с угловой скоростью, равной единице. Направление движения определяется при $p > 0$ из условия роста x; при $p < 0$ — из условия убывания x.

II. $|p| \geqslant 1 \Rightarrow \dot{p} = -x$, $\dot{x} = \pm 1 \Rightarrow x = \pm (t + C') \Rightarrow p = \mp (t + C')^2/2 + C = \mp x^2/2 + C$.

Движение происходит по параболам. Направление движения определяется при $p \geqslant 1$ из условия роста x; при $p < -1$ — из условия убывания x.

Оптимальное движение начинается на оси p ($x(0) = 0$) и заканчивается на оси x ($p(T_0) = 0$); $\hat{x}(t) \equiv 0$ — допустимая экстремаль $\forall T_0$. При $T_0 = (k - 1/2)\pi$, $k \in \mathbf{N}$, допустимыми экстремалями являются также функции $\hat{x}(t) = C \sin t$, $|C| \leqslant 1$. Пусть $(k - 1/2)\pi < T_0 < (k + 1/2)\pi$; тогда оптимальная траектория $\hat{x}_n(\cdot)$ может содержать нечетное число «четверть оборотов», n, $n = 1, 2, \ldots, k$. Учитывая условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(T_0) = 0$ и непрерывность функций x и $\dot{x}$, получаем

$$\widehat{x}_{\min(n)} = \pm \begin{cases} t, & |t| \leqslant \tau_n, \\ \sqrt{1+\tau_n^2}\,\operatorname{sign} t \cos(t - T_0/(2n-1)), & \tau_n \leqslant |t| \leqslant T_0/(2n-1), \\ \text{далее антипериодично,} & \end{cases}$$

где τ_n — корень уравнения $(2n-1)(\tau_n + \operatorname{arctg} \tau_n^{-1}) = T_0$, $n = 1, \ldots, k$. Нетрудно видеть, что

$$S_{\max} = T_0 \quad \left(x_n(t) = \int_0^t \operatorname{sign} \sin 2\pi n \tau \, d\tau \right).$$

4. В силу компактности ограничений и непрерывности функционала решение задачи на минимум существует. Вычисляя

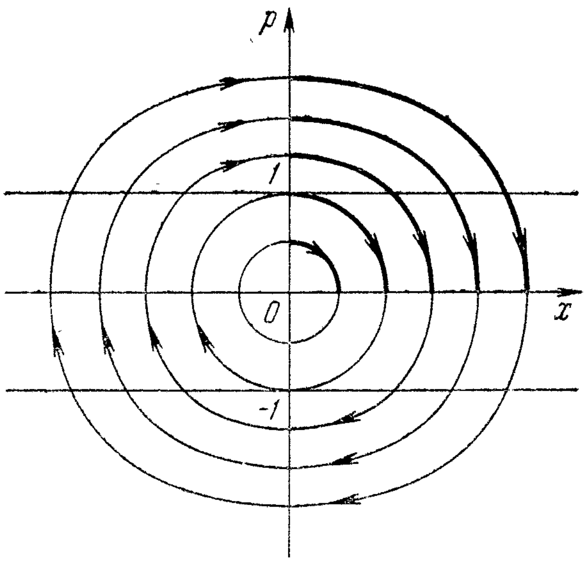

Рис. 8.

значение функционала на экстремалях $\hat{x}_n$, находим $J(\widehat{x}_n(\cdot)) = (2n-1)\left(-\dfrac{\tau_n^3}{3}\right) \geqslant J(\widehat{x}_1(\cdot)) = -\dfrac{\tau_1^3}{3}$.

Ответ. $T_0 < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{x} \equiv 0 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 0$; $T_0 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow C \sin t \in \operatorname{abs\,min}$ $\forall\ |C| \leqslant 1$, $S_{\min} = 0$; $T_0 > \pi \Rightarrow \widehat{x} = \pm \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \sqrt{1+\tau^2}\cos(t - T_0), & \tau \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$ $\widehat{x} \in \operatorname{abs\,min}$ (τ — корень уравнения $\tau \operatorname{ctg}(T_0 - \tau) = 1$, $\tau \in \left(T_0 - \dfrac{\pi}{2},\ T_0\right)$); $S_{\min} = -\dfrac{\tau^3}{3}$, $S_{\max} = T_0$.

11.45. $T_0 < \pi \Rightarrow \widehat{x} \equiv 0 \in \operatorname{abs\,min}$, $S_{\min} = 0$; $T_0 = \pi \Rightarrow C \sin t \in \operatorname{abs\,min}\ \forall\ |C| \leqslant 1$, $S_{\min} = 0$; $T_0 > \pi \Rightarrow \widehat{x} =$

$$= \pm \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \sqrt{1+\tau^2}\cos(t - T_0/2), & \tau \leqslant t \leqslant T_0 - \tau, \\ T_0 - t, & T_0 - \tau \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{abs min}$$

$\left(\tau\right.$ — корень уравнения $\tau \operatorname{tg}\left(\frac{T_0}{2} - \tau\right) = 1$, лежащий на отрезке $\left.\left[\frac{T_0}{2} - \frac{\pi}{2}, \frac{T_0}{2}\right]\right)$; $S_{\min} = -\frac{2}{3}\tau^3$, $S_{\max} = T_0 \left(x_n(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sign}\sin 2\pi n\tau\, d\tau. \right)$.

11.46. $\hat{x} \equiv \pm 1 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 0$. $S_{\max} = +\infty$. Допустимыми экстремалями являются также функции $\hat{x}(t) = \pm\sqrt{2}\cos \pi kt$, $k \in \mathbf{N}$. 11.47. $\pm\sqrt{2}\cos \pi t \in \text{abs min}$, $S_{\min} = \pi^2$, $S_{\max} = +\infty$. Допустимыми экстремалями являются также функции $\pm\sqrt{2}\cos \pi kt$, $k = 2, 3, \ldots$ 11.48. Допустимые экстремали: $\hat{x}_k = \pm\sqrt{2}\sin(1/2 + k)\pi t$, $k \in \mathbf{Z}$, $\hat{x}_1 \in \text{abs min}$. Указание. Существование решения можно доказать, вводя принудительное ограничение $|\dot{x}| \leqslant A$; $S_{\min} = \pi^2$, $S_{\max} = +\infty$. 11.49. $S_{\max} = +\infty$, $\sqrt{2 - t^2} \in \text{abs min}$. 11.50. $S_{\max} = +\infty$, $\sqrt{1 - t^2 + t} \in \text{abs min}$. 11.51. $S_{\max} = +\infty$, $\sqrt{2 - (t-1)^2} \in \text{abs min}$ ($\hat{T} = 1 - \sqrt{2/5}$. 11.52. $\sqrt{1-t^2} \in \text{abs max}$, $-\sqrt{1-t^2} \in \text{abs min}$. 11.53. $\sqrt{1-t^2} \in \text{abs max}$, $-\sqrt{1-t^2} \in \text{abs min}$. 11.54. $S_{\max} = +\infty$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{ch} 1}, \frac{\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{ch} 1}\right) \in \text{abs min}$. 11.55. $S_{\max} = +\infty$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\sin t, -\sin t) \in \text{abs min}$. 11.56. $S_{\max} = +\infty$, $S_{\min} = -\infty$. Допустимая экстремаль: $\hat{x} = (3t^2 - 2t, 6t^2 - 4t)$. 11.57. $S_{\max} = +\infty$, $(3t^2 - t^3)/2 \in \text{abs min}$. 11.58. $S_{\max} = +\infty$, $t - t^2/2 \in \text{abs min}$. 11.59. $S_{\max} = +\infty$, $t^2/2 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 1$. 11.60. $S_{\max} = +\infty$, $t^2 - t \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 4$. 11.61. $S_{\max} = +\infty$, $t^4 - 2t^3 + t \in \text{abs min}$, $S_{\min} = -24/5$. 11.62. $S_{\max} = +\infty$, $t^4 - 5t^3/2 + 3t^2/2 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = -9/5$. 11.63. $S_{\max} = +\infty$, $t^4 - 2t^3 + t^2 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = -4/5$. 11.64. $S_{\max} = +\infty$, $2t^3 - t^4 \in \text{abs min}$. 11.65. $S_{\max} = +\infty$, $t^2/2 - et(\ln t - 1) \in \text{abs min}$. 11.66. $S_{\max} = +\infty$, $t \ln t \in \text{abs min}$. 11.67. $S_{\max} = +\infty$, $t \ln t \in \text{abs min}$. 11.68. $S_{\max} = +\infty$, $(t + e)\ln t - t \in \text{abs min}$. 11.69. $S_{\max} = +\infty$, $\ln t \in \text{abs min}$. 11.70. $S_{\max} = +\infty$, $\ln t \in \text{abs min}$. 11.71. $S_{\max} = +\infty$, $e/(2t) + \ln t \in \text{abs min}$. 11.72. $S_{\max} = +\infty$, $1/t \in \text{abs min}$. 11.73. $S_{\max} = +\infty$, $1/t \in \text{abs min}$. 11.74. $S_{\max} = +\infty$, $\operatorname{th}\pi(\operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t \cos t)/2 - \operatorname{sh} t \sin t \in \text{abs min}$. 11.75. $S_{\max} = +\infty$, $\operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t(\operatorname{th}\pi \sin t + \cos t) \in \text{abs min}$. 11.76. $S_{\max} = +\infty$, $\operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t \cos t \in \text{abs min}$. 11.77. Допустимые экстремали: $\cos T_0 \operatorname{ch} T_0 \neq 1 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0 \notin \text{loc extr}$, $\cos T_0 \operatorname{ch} T_0 = 1 \Rightarrow \hat{x} = C((\operatorname{ch} T_0 - \cos T_0) \times (\operatorname{sh} t + \sin t) - (\operatorname{sh} T_0 - \sin T_0)(\operatorname{ch} t + \cos t)) \notin \text{loc extr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. 11.78. Допустимая экстремаль: $\hat{x}(t) \equiv 0$ ($\hat{T} > 0$ — любое) $\notin \text{loc extr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$. 11.79. $S_{\max} = +\infty$; $(\sin t + \operatorname{sh} t)/2 + \left(1 - \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\right)(\cos t + \operatorname{ch} t) \Big/ \left(2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\right) \notin \text{loc extr}$; $S_{\min} = -\infty$. 11.80. $S_{\max} = +\infty$, $S_{\min} = -\infty$; $\left(\cos t + \operatorname{ch} t - \frac{1 + \operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}(\operatorname{sh} t + \sin t)\right)/2 \notin \text{loc extr}$. 11.81. $S_{\max} = +\infty$, $S_{\min} = -\infty$; $\left(\sin t + \operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\cos t - \frac{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch}(\pi - t)}{\operatorname{sh}\pi}\right)/2 \notin \text{loc extr}$.

11.82. $S_{\max}=+\infty$, $S_{\min}=-\infty$; $\left(\dfrac{1+\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}(\operatorname{sh}t+\sin t)-\operatorname{ch}t-\cos t\right)\Big/2\notin$ loc extr. 11.83. $S_{\max}=+\infty$, $S_{\min}=-\infty$; $\dfrac{(1+\operatorname{ch}\pi)(\operatorname{ch}t+\cos t)}{2\operatorname{sh}\pi}-\dfrac{\operatorname{sh}t+\sin t}{2}\notin$ loc extr. 11.84. $S_{\max}=+\infty$, $(\sin t)/2+(\operatorname{sh}t)\Big/\left(2\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}\right)\in$ abs min. 11.85. $S_{\max}=+\infty$, $S_{\min}=-\infty$; $\dfrac{\operatorname{ch}t}{2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\cos t}{2}\notin$ loc extr. 11.86. $S_{\max}=+\infty$; $\widehat{x}=\dfrac{\operatorname{sh}t}{2\operatorname{ch}\pi}-\dfrac{\sin t}{2}\notin$ loc extr; $S_{\min}=-\infty\left(x_n(t)=\widehat{x}(t)+n\left((\operatorname{ch}t-\cos t)-\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\operatorname{ch}\pi+1}\times(\operatorname{sh}t-\sin t)\right)\right)$. 11.87. $S_{\max}=+\infty$; $\widehat{x}=\dfrac{\operatorname{ch}t}{2\operatorname{ch}\pi}-\dfrac{\cos t}{2}\notin$ loc extr; $S_{\min}=-\infty$ $\left(x_n(t)=\widehat{x}(t)+n\left(\operatorname{ch}(\pi-t)+\cos t-\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\operatorname{ch}\pi+1}\times(\operatorname{sh}(\pi-t)+\sin t)\right)\right)$. 11.88. $S_{\max}=+\infty$; $\sin t\in$ abs min, $S_{\min}=0$. 11.89. $S_{\max}=+\infty$; $-\sin t\in$ abs min, $S_{\min}=0$. 11.90. $S_{\max}=+\infty$; $\widehat{x}=\cos t\notin$ loc extr; $S_{\min}=-\infty$ $\left(x_n(t)=\widehat{x}(t)+n\left(\operatorname{ch}t-\cos t-\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\operatorname{ch}\pi+1}(\operatorname{sh}t-\sin t)\right)\right)$. 11.91. $S_{\max}=+\infty$; $\widehat{x}=-\cos t\notin$ loc extr; $S_{\min}=-\infty$ $\left(x_n(t)=\widehat{x}(t)+n\left(\operatorname{ch}(\pi-t)+\cos t-\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\operatorname{ch}\pi+1}(\operatorname{sh}(\pi-t)+\sin t)\right)\right)$. 11.92. $S_{\max}=+\infty$; $\sin t\in$ abs min, $S_{\min}=0$. 11.93. $S_{\max}=+\infty$; $\left(1+\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}\right)\times(\sin t-\operatorname{sh}t)/2+\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)/2\in$ abs min. 11.94. $S_{\max}=+\infty$; $\sin t\in$ abs min. 11.95. $S_{\max}=+\infty$; $\operatorname{sh}t\in$ abs min. 11.96. $S_{\max}=+\infty$; $\operatorname{sh}(t-1)\in$ abs min. 11.97. $S_{\max}=+\infty$; $\operatorname{ch}t-1\in$ abs min. 11.98. $S_{\max}=+\infty$; $1-\operatorname{ch}(t-1)\in$ abs min. 11.99. $S_{\max}=+\infty$; $t+\sin t\in$ abs min. 11.100. $S_{\max}=+\infty$; $1-\cos t\in$ abs min. 11.101. $S_{\max}=+\infty$; $2(\sin t-\cos t-t+1)/(4-\pi)\in$ abs min. 11.102. $S_{\max}=-S_{\min}=\dfrac{32}{3}$; $\hat{x}(t)=t^2-4t\in$ abs min, $-\hat{x}\in$ abs max.

11.103. $S_{\max}=-S_{\min}=32(2-\sqrt{2})/3$;

$$\widehat{x}=\begin{cases} t^2+(8-8\sqrt{2})\,t, & 0\leqslant t\leqslant 2\sqrt{2},\\ -(t-4)^2, & 2\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 4,\end{cases}$$

$\dot{x}\in$ abs min, $-\widehat{x}\in$ abs max.

11.104. $S_{\max} = -S_{\min} = 4;$

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ -(t-4)^2, & 3 \leqslant t \leqslant 4, \end{cases}$$

$\hat{x} \in \text{abs min}, \quad -\hat{x} \in \text{abs max}.$

11.105. $S_{\max} = -S_{\min} = 1/(2\sqrt{30})$; $\hat{x} = \sqrt{5}\ (t^4 - 2t^3 + t)/(2\sqrt{6}) \in \text{abs max}$, $-\hat{x} \in \text{abs min}$. **11.106.** $S_{\max} = -S_{\min} = \dfrac{1}{8\sqrt{5}}$; $\hat{x} = \sqrt{5}\,(t^4/3 - 5t^3/6 + t^2/2) \in \text{abs max}$, $-\hat{x} \in \text{abs min}$.

11.107. $S_{\max} = -S_{\min} = \dfrac{1}{12\sqrt{5}}$; $\hat{x} = \sqrt{5}t^2\,(t-1)^2/2 \in \text{abs max}$, $-\hat{x} \in \text{abs min}$. **11.108.** $S_{\max} = +\infty$; $2t \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 0$.

11.109. $S_{\max} = +\infty$; $5(t^4 - 6t^2 + 5)/16 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = \dfrac{15}{2}$. **11.110.** $S_{\max} = +\infty$; $15t^2(t-2)^2/8 \in \text{abs min}$. $S_{\min} = 45$. **11.111.** $S_{\max} = +\infty$; $30t^2(t-1)^2 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 720$. **11.112.** $S_{\max} = +\infty$; $C((\operatorname{sh}\omega t - \sin\omega t)(\operatorname{ch}\omega + \cos\omega) + (\cos\omega t - \operatorname{ch}\omega t)(\operatorname{sh}\omega + \sin\omega)) \in \text{abs min}$ ($\omega > 0$ — минимальный корень уравнения $\operatorname{ch}\omega\cos\omega = -1$, константа C определяется из изопериметрического условия); $S_{\min} = \omega^4$. **11.113.** $S_{\max} = +\infty$; $C((\operatorname{ch}\omega - \cos\omega)(\operatorname{sh}\omega t - \sin\omega t) - (\operatorname{sh}\omega - \sin\omega)(\operatorname{ch}\omega t - \cos\omega t)) \in \text{abs min}$ (ω — минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{ch}\omega\cos\omega = 1$, C находится из изопериметрического условия); $S_{\min} = \omega^4$. **11.114.** $S_{\max} = +\infty$; $\hat{x} = C((\operatorname{sh}\omega t + \sin\omega t)(\operatorname{ch}\omega - \cos\omega) - (\operatorname{ch}\omega t + \cos\omega t)(\operatorname{sh}\omega - \sin\omega)) \in \text{abs min}$ (ω — минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{ch}\omega\cos\omega = 1$, C определяется из условия $\displaystyle\int_0^1 x^2 dt = 1$); $S_{\min} = \omega^4$. **11.115.** Допустимые экстремали: $\hat{x}_k = \sqrt{2}\sin(2\pi kt + \gamma)$ $\forall\gamma \in \mathbf{R}$, $\hat{x}_1 \in \text{abs min}$; $S_{\min} = (2\pi)^4$, $S_{\max} = +\infty$. **11.116.** $S_{\max} = +\infty$; $x = t(1-t)$ $(T = 1) \in \text{abs min}$. **11.117.** $S_{\max} = +\infty$; $x = t^2/2\,(T = 1) \in \text{abs min}$. **11.118.** $S_{\max} = +\infty$; $x = t^3/16 - t^2/4\,(T = 4) \in \text{abs min}$. **11.119.** $S_{\max} = +\infty$; $\hat{x} = t^2\,(T = 1) \in \text{abs min}$. **11.120.** $t^3 - t^2 \in \text{abs max}$, $t^2 - t^3 \in \text{abs min}$. **11.121.** $3t^2 - 2t^3 \in \text{abs max}$, $2t^3 - 3t^2 \in \text{abs min}$. **11.122.** $S_{\max} = +\infty$; $t^3/2 - t^4/8 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 3$. **11.123.** $S_{\max} = +\infty$; $(t^2 + 2t + 2)/5 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 0$. **11.124.** $S_{\max} = +\infty$; $(t^5 - 5t^4 + 10t^3)/6 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 20$. **11.125.** $S_{\max} = +\infty$; $(8t^5 - 25t^4 + 20t^3)/3 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 320$. **11.126.** $S_{\max} = +\infty$; $6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 720$. **11.127.** $S_{\max} = +\infty$; $t^3(t-1)^2 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 36$.

11.128. Решение. 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^1 \left(\dot{x}^2 - \lambda\frac{x^2}{t}\right)dt \to \inf; \quad x(0) = 0.$$

2. Уравнение Эйлера: $\ddot{x} + \lambda x/t = 0$; условие трансверсальности: $\dot{x}(1) = 0$.

3. Решение, удовлетворяющее условию трансверсальности, имеет вид $\varphi(t)=\sqrt{t}\mathcal{J}_1(2\sqrt{\lambda t})$, где $\mathcal{J}_1$ — функция Бесселя. При этом $\mathcal{J}_0(2\sqrt{\lambda})=0\Rightarrow\varphi'(1)=0$ и φ не имеет нулей на $[0,1]$.

4. Из основной формулы Вейерштрасса приходим к формуле

$$\int_0^1\left(\dot{x}^2-\lambda\frac{x^2}{t}\right)dt=\int_0^1\left(\dot{x}-\frac{\varphi'(t)\,x}{\varphi(t)}\right)^2dt=$$

$$=\int_0^1\left(\dot{x}-\frac{\mathcal{J}_0(2\sqrt{\lambda t})}{\sqrt{t}\mathcal{J}_1(2\sqrt{\lambda t})}\,x\right)^2dt,$$

проверяемой непосредственно и приводящей к нужному неравенству.

Замечание. Здесь необходимое условие использовалось в обстановке недостаточной гладкости, но оно привело к цели. То же касается и других задач цикла.

11.129. Решение. 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_{\mathbf{R}_+}\left(\dot{x}^2-\frac{x^2}{4t^2}\right)dt\to\inf;\quad x(0)=0,$$

2. Уравнение Эйлера: $\ddot{x}+\dfrac{x}{4t^2}=0.$

3. Уравнению Эйлера удовлетворяет функция $\varphi(t)=\sqrt{t}$ (непосредственная проверка).

4. Экстремаль φ (недопустимая, ибо $\dot{\varphi}\notin L_2(\mathbf{R}_+)$) приводит к формуле

$$\int_0^\infty\left(\dot{x}^2-\frac{x^2}{4t^2}\right)dt=\int_0^\infty\left(\dot{x}-\frac{\varphi'(t)\,x}{\varphi(t)}\right)^2dt=\int_0^\infty\left(\dot{x}-\frac{x}{2t}\right)^2dt,\ x(0)=0,$$

проверяемой непосредственно (скажем, для гладких финитных функций) и приводящей к нужному неравенству.

11.130. Указание. Приемом, использованным при решении задачи 11.129, вывести тождество ($\varphi(t)=\sqrt{t}\ln t/e^2$ — допустимая экстремаль)

$$\int_0^1\left(\dot{x}^2-\frac{x^2}{4t^2}\right)dt=\int_0^1\left(\dot{x}-\frac{\varphi'(t)\,x}{\varphi(t)}\right)^2dt=\int_0^1\left(\dot{x}-\frac{\ln t}{2t\ln\frac{t}{e^2}}\,x\right)^2dt,$$

проверяемое непосредственно и приводящее к нужному неравенству.

11.131. Указание. а) Приемом, использованным при решении задачи 11.129, вывести тождество ($\varphi(t)=t(2-t)$ — допустимая экстремаль)

$$\int_0^1\left(\dot{x}^2-\frac{2x^2}{t(2-t)}\right)dt=\int_0^1\left(\dot{x}-\frac{\varphi'(t)\,x}{\varphi(t)}\right)^2dt=\int_0^1\left(\dot{x}-\frac{2(1-t)}{t(2-t)}\,x\right)^2dt,$$

проверяемое непосредственно и приводящее к нужному неравенству.

б) Поступить аналогично а) с $\varphi(t) = te^{-t}$.

11.132. Указание. Поступить аналогично предыдущей задаче с $\varphi(t) = t(1-t)$.

11.133. Решение. 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^\infty \left(\left|\dot x\right|^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left|\frac{x}{t}\right|^p\right) dt \to \inf; \quad x(0) = 0.$$

2. Уравнение Эйлера: $\left(\left|\dot x\right|^{p-1}\operatorname{sign}\dot x\right)^{\boldsymbol\cdot} + \left(\frac{p-1}{pt}\right)^p |x|^{p-1}\operatorname{sign} x = 0.$

3 Ищем решение уравнения Эйлера вида $\varphi(t) = t^a$ и получаем, что $a = (p-1)/p$.

4. Основная формула Вейерштрасса приводит к тождеству

$$\int_0^\infty \left(\left|\dot x\right|^p - \left(\frac{(p-1)}{p}\right)^p \frac{|x|^p}{t^p}\right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\left|\dot x\right|^p - \left|\frac{\varphi'(t)\,x}{\varphi(t)}\right|^p - p\left(\dot x - \frac{\varphi'(t)\,x}{\varphi(t)}\right)\right) dt,$$

приводящему к нужному неравенству.

Пример. При $p = 4$ имеем следующее тождество:

$$\int_0^\infty \left(\dot x^4 - \left(\frac{3x}{4t}\right)^4\right) dt = \int_0^\infty \left(\dot x - \frac{3x}{4t}\right)^2 \left(\dot x^2 + \frac{3\dot x x}{2t} + \frac{27x^2}{10t^2}\right) dt \geqslant 0,$$

$$x(0) = 0.$$

11.134. Решение. (С. А. Аюнц). 1. $\int_0^T (1 + \varepsilon|u|)\ dt \to \inf;$ $\dot x_1 = x_2,\ \dot x_2 = u,\ |u| \leqslant 1,\ x_1(0) = x_0,\ x_2(0) = v_0,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$ Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^T \left(\lambda_0(1 + \varepsilon|u|) + p_1\left(\dot x_1 - x_2\right) + p_2\left(\dot x_2 - u\right)\right)dt +$$

$$+ \lambda_1(x_1(0) - x_0) + \lambda_2(x_2(0) - v_0) + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $\dot p_1 = 0$, $\dot p_2 + p_1 = 0$ ($\Leftrightarrow p_2(t) = at + b$); б) принцип максимума: $\max\limits_{|u|\leqslant 1}(p_2(t)u - \lambda_0\varepsilon|u|) = p_2(t)\hat u(t) - \lambda_0\varepsilon|\hat u(t)|$; в) трансверсальность: $p_2(0) = \lambda_2$, $p_1(0) = \lambda_1$, $p_2(\widehat T) = -\mu_2$, $p_1(\widehat T) = -\mu_1$; г) стационарность $\mathscr{L}_T$: $\lambda_0(1 + \varepsilon|\hat u(\widehat T)|) + \mu_2\hat u(\widehat T) = 0$.

3. $p_2(t) \equiv 0 \Rightarrow$ все множители Лагранжа равны нулю, т. е. $p_2(\cdot) \not\equiv 0$. Если $\lambda_0 = 0$, то из б) и в) $\Rightarrow |p_2(\widehat T)| = 0 \Rightarrow p_2(\widehat T) = 0$, т. е. $p_2(t) = a(t - \widehat T) \Rightarrow \hat u(t) \equiv 1$ или $\hat u(t) \equiv -1$. Итак,

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow (x_0, v_0) \in \Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2^2/2, \quad x_2 \leqslant 0, \quad$ или $\quad x_1 = -x_2^2/2, \ x_2 \geqslant 0\}$. Если $(x_0, v_0) \notin \Gamma$, то $\lambda_0 \neq 0$ и полагаем $\lambda_0 = 1$.

Из экстремальной задачи $p_2(t)u - \varepsilon|u| \to \sup$; $|u| \leqslant 1$, получаем

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} 0, & |p_2(t)|/\varepsilon \leqslant 1, \\ \operatorname{sign} p_2(t), & |p_2(t)|/\varepsilon > 1. \end{cases}$$

Условия трансверсальности с учетом того, что $\lambda_0 = 1$, таковы:

$$1 + \varepsilon|\hat{u}(\hat{T})| - p_2(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) = 0.$$

Отсюда следует, что случай $\hat{u}(\hat{T}) = 0$ невозможен, т. е.

$$|\hat{u}(\hat{T})| = 1 \Rightarrow |p_2(\hat{T})| = 1 + \varepsilon.$$

4. Опишем синтез в этой задаче. Возможны два случая: $p_2(\hat{T}) = 1 + \varepsilon$ и $p_2(\hat{T}) = -(1+\varepsilon)$. Рассмотрим только первый. Случай второй аналогичен. Из рис. 9 ясно, что траектория состоит из трех частей: вначале $(t \in [0, \tau'])$ управление равно -1, затем $(t \in (\tau', \tau))$ оно равно нулю и, наконец, в конце $(t \in [\tau, \hat{T}])$ $\hat{u}(t) \equiv 1$. Из подобия треугольников ABC и BDE получаем $(\tau - \tau')/(\hat{T} - \tau) = 2\varepsilon$. Обозначим $\hat{T} - \tau$ через γ. Тогда второе переключение происходит, когда $x_2 = -\gamma$, $x_1 = \gamma^2/2$. При первом переключении x_2 также равно γ (ибо между переключениями ускорение равно нулю), а $x_1 = \gamma^2/2 + 2\varepsilon\gamma^2$ (ибо аппарат двигался со скоростью $-\gamma$, время движения $2\varepsilon\gamma$). Получаем, что кривая первых переключений имеет вид $x_1 = (2\varepsilon + 1/2)\,x_2^2$, $\quad x_2 \leqslant 0$. Синтез изображен на рис. 10.

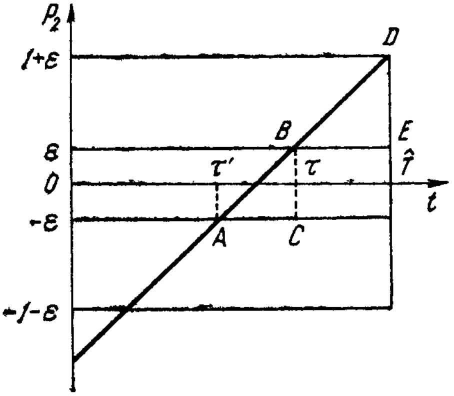

Рис. 9.

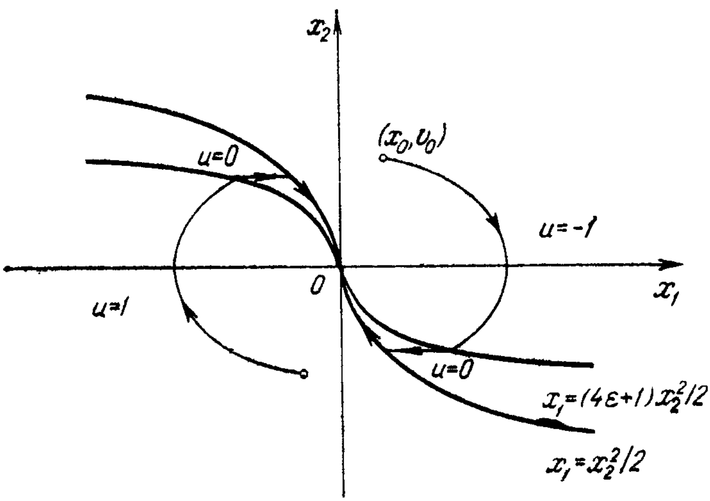

Рис. 10.

11.135. Решение (С. А. Аюнц). 1. $\int_0^T (1+\varepsilon f(u))\,dt \to \inf$; $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $|u| \leqslant 1$, $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = v_0$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_0^T \left(\lambda_0 (1+\varepsilon f(u)) + p_1\left(\dot{x}_1 - x_2\right) + p_2\left(\dot{x}_2 - u\right)\right) dt + \\ + \lambda_1(x_1(0) - x_0) + \lambda_2(x_2(0) - v_0) + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T).$$

2. Необходимые условия: а) уравнение Эйлера: $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 + p_1 = 0$ $(\Leftrightarrow p_2(t) = at + b)$; б) принцип максимума: $\max\limits_{|u|\leqslant 1}(p_2(t)u - \lambda_0\varepsilon f(u)) = p_2(t)\hat{u}(t) - \lambda_0\varepsilon f(\hat{u}(t))$; в) трансверсальность: $p_2(0) = \lambda_2$, $p_1(0) = \lambda_1$, $p_2(\hat{T}) = -\mu_2$, $p_1(\hat{T}) = -\mu_1$; г) стационарность $\mathscr{L}_T$: $\lambda_0(1+\varepsilon f(\hat{u}(\hat{T}))) + \mu_2\hat{u}(\hat{T}) = 0$.

3 $p_2(t) \equiv 0 \Rightarrow$ все множители Лагранжа — нули, т. е. $p_2(\cdot) \not\equiv 0$. Если $\lambda_0 = 0$, то из б) и в) $\Rightarrow |p_2(\hat{T})| = 0 \Rightarrow p_2(\hat{T}) = 0$, т. е $p_2(t) = a(t-\hat{T}) \Rightarrow \hat{u}(t) \equiv 1$ или $\hat{u}(t) \equiv -1$. Итак, $\lambda_0 = 0 \Rightarrow (x_0, v_0) \in \Gamma = \{(x_1, x_2)\,|\,x_1 = x_2^2/2,\ x_2 \leqslant 0$, или $x_1 = -x_2^2/2,\ x_2 \geqslant 0\}$. Если же $(x_0, v_0) \notin \Gamma$, то $\lambda_0 \neq 0$ и полагаем $\lambda_0 = 1$. Далее предположим для простоты, что f' строго монотонна. Общий случай требует лишь некоторых уточнений. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\varepsilon f(u) - p_2(t)u \longrightarrow \inf; \quad |u| \leqslant 1.$$

Решив ее, получим

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} g(p_2(t)/\varepsilon), & |p_2(t)| \leqslant \varepsilon f'(1), \\ \operatorname{sign} p_2(t), & |p_2(t)| > \varepsilon f'(1), \end{cases}$$

где $g(y) = (f'(y))^{-1}$. Условия же трансверсальности с учетом того, что $\lambda_0 = 1$, таковы: $1 + \varepsilon f(\hat{u}(\hat{T})) - p_2(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) = 0$. При этом возможны два случая:

а′) $\hat{u}(\hat{T}) = \operatorname{sign} p_2(\hat{T})$; тогда из б) $\Rightarrow 1 + \varepsilon f(1) = |p_2(\hat{T})| \Rightarrow 1 + \varepsilon f(1) > \varepsilon f'(1)$;

б′) $\hat{u}(\hat{T}) = g(p_2(\hat{T})/\varepsilon)$; тогда из б) $f^*(p_2(\hat{T})/\varepsilon) = 1/\varepsilon$, где f^* — преобразование Лежандра — Юнга — Фенхеля f.

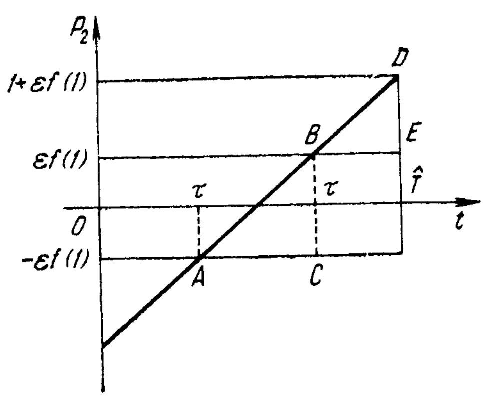

Рис. 11.

4. Рассмотрим сначала первый случай, когда $p_2(\hat{T}) = 1 + \varepsilon f(1) > \varepsilon f'(1)$ (рис. 11) (вариант, когда $p_2(\hat{T}) = -1 - \varepsilon f(1)$, аналогичен). Из рис 11 ясно, что траектория состоит из трех частей: начальной части $(t \in [0, \tau'])$, когда управление равно минус единице, средней части $(t \in (\tau', \tau))$, когда управление по модулю меньше единицы, и третьей части $(t \in [\tau, \hat{T}])$, когда управление равно единице и точка $(x_1(t), x_2(t))$ движется по кривой Γ.

Вся траектория восстанавливается по двум параметрам: τ и $\hat{T}$. В частности, τ' определяется из подобия треугольников ABC и BDE:

$\frac{\tau - \tau'}{\widehat{T} - \tau} = \frac{2\varepsilon f'(1)}{1 + \varepsilon(f(1) - f'(1))}$, управление $\hat{u}(t)$ на участке $[\tau', \tau]$ равно $g(p_2(t)/\varepsilon)$, а $p_2(t) = \varepsilon f'(1) + \frac{(t-\tau)(1+\varepsilon(f(1)-f'(1)))}{\widehat{T} - \tau}$. При этом, как это легко усмотреть из выписанных формул, точки, где происходят переключения $(x_1(\tau'), x_2(\tau'))$, зависят от одного

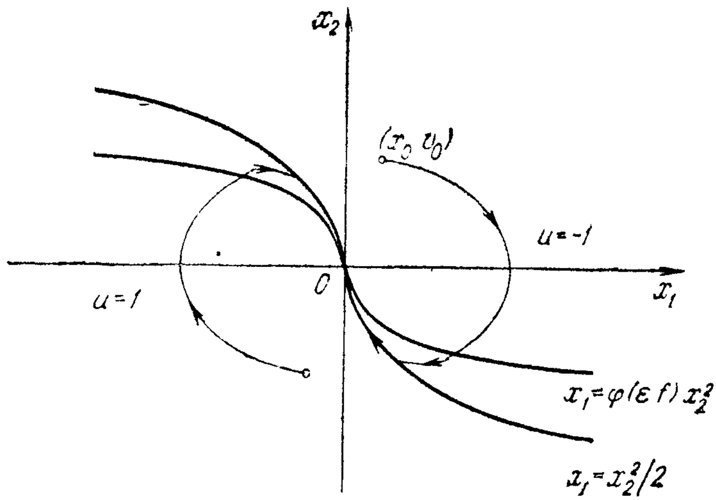

Рис. 12.

параметра $\gamma = \hat{T} - \tau$, образуя кривую Γ'. Синтез схематично изображен на рис. 12.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $1 + \varepsilon f(1) \leqslant \varepsilon f'(1)$. Тогда из п. 3 следует, что $p_2(\hat{T}) = \varepsilon f^{*-1}(1/\varepsilon) = p(\varepsilon, f) = p \leqslant \varepsilon f'(1)$. Пусть $p > 0$. Тогда, зафиксировав $\hat{T}$ как параметр, опишем совокупность точек $(x_1(\hat{T}), x_2(\hat{T}))$, из которых можно попасть в начало координат, не переходя на режим ± 1. Имеем (рис. 13) верхнюю и нижнюю прямые:

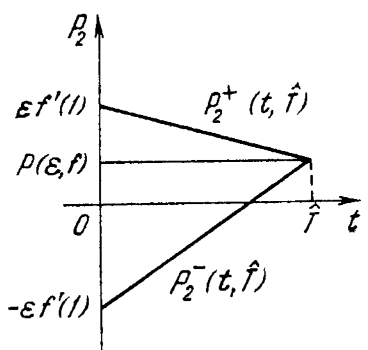

Рис. 13.

$$p_2^+(t, \widehat{T}) = -\varepsilon f'(1) + \frac{t(p - \varepsilon f'(1))}{\widehat{T}},$$

$$p_2^-(t, \widehat{T}) = -\varepsilon f'(1) + \frac{t(p + \varepsilon f'(1))}{\widehat{T}}.$$

Положим $\widehat{u}^{\pm}(t, \widehat{T}) = g\left(p_2^{\pm}(t, \widehat{T})/\varepsilon\right)$, $\xi_2^{\pm}(\widehat{T}) = \int\limits_0^{\widehat{T}} u^{\pm}(t, \widehat{T})\,dt$, $\xi_1^{\pm}(\widehat{T}) = \int\limits_0^{\widehat{T}} (\widehat{T} - t)\,u^{\pm}(t, \widehat{T})\,dt$. Тогда искомое множество лежит между кривыми $\widehat{T} \to \left(\xi_1^+(\widehat{T}), \xi_2^+(\widehat{T})\right)$ и $\widehat{T} \to \left(\xi_1^-(\widehat{T}), \xi_2^-(\widehat{T})\right)$. Сепаратрисой служит движение, когда $p_2^0(t, p) = p$. Синтез схематично изображен на рис. 14.

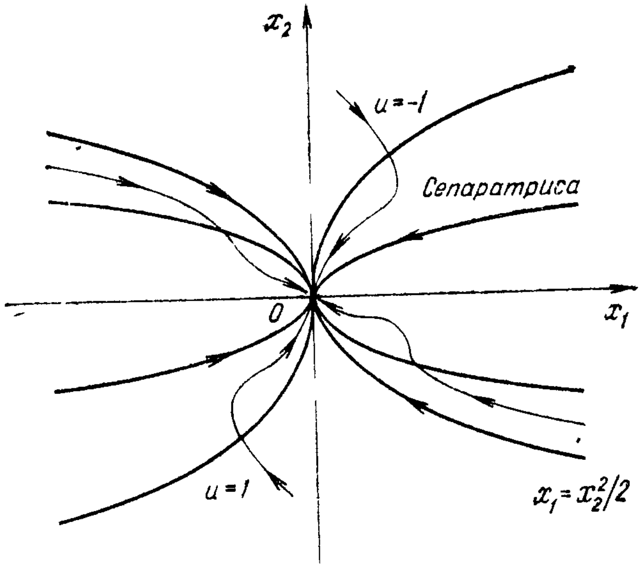

Рис. 14.

11.136. $\widehat{x} = (\underbrace{1/\sqrt{2m}, \ldots, 1/\sqrt{2m}}_{m}, \underbrace{-1/\sqrt{2m}, \ldots, -1/\sqrt{2m}}_{m}, 0) \in$
$\in$ abs min.

11.137. Указание. Формализовать задачу: $x_1 + x_2 + x_3 \to \inf$; $x_1^2 + \ldots + x_{100}^2 \geqslant 10000$, $x_1 + \ldots + x_{100} \leqslant 3$, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100} \geqslant 0$, и применить принцип Лагранжа.

11.138. Указание. По теореме Рисса неотрицательный полином по косинусам представляется в виде $x(t) = |x_0 + x_1 e^{it} + \ldots + x_n e^{int}|^2$, откуда следует, что задача допускает следующую формализацию:

$$\rho_1 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} \to \sup; \quad \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = 1.$$

Ответ. $\rho_1 = \cos \frac{\pi}{n+2}$.

11.139. Указание. Формализовать задачу:

$$-\int_0^\infty (1 - \chi_{[0,a]}(t))\, x(t)\, dt \to \inf; \int_0^\infty t^2 x(t)\, dt \leqslant 1, \dot{x} = u, -A \leqslant u \leqslant 0,$$

и применить принцип Лагранжа.

11.140. Указание. Применив принцип Лагранжа к задаче

$$\int_0^\infty \dot{x}^2 dt \to \sup; \quad \int_0^\infty \left(\ddot{x}^2 + x^2\right) dt \leqslant 1,$$

прийти к следующей формуле, являющейся следствием основной формулы Вейерштрасса:

$$\int_0^\infty \left(\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 + x^2\right) dt = \int_0^\infty \left(\ddot{x} + \dot{x} + x\right)^2 dt + \left(\dot{x}(0) + x(0)\right)^2,$$

а затем вместо $x(t)$ подставить $y(at)$, $a > 0$.

11.141. При $n = 1$ $\hat{x}(t) = e^{-t}$; при $n = 2$ $\hat{x}(t) = e^{-t/\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}$. При произвольном n функция $\hat{x}(\cdot)$ имеет вид $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} e^{k_j t}$, где k_j — корни уравнения $k^{2n} = (-1)^{n+1}$, лежащие в левой полуплоскости, а α_{jn} являются решением некоторой системы линейных уравнений.

11.142. Функция $\hat{x}(\cdot)$ симметрична относительно прямой $t = 1/2$; на отрезке $[0, 1/2]$ эта функция является обратной к функции $t = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1 - kz^{q+1}}}$, $q = \frac{p+1}{p-1}$, а константа k определяется из условий задачи.

11.143. Решения задачи не существует. Если наложить «принудительное» ограничение $|u| \leqslant A$, то при $A > \pi^2$ решение будет иметь вид

$$\hat{x}_A(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau(A), \\ \sqrt{A}\cos\left(\sqrt{A}\,(t - 1/2)\right), & \tau(A) \leqslant t \leqslant 1 - \tau(A), \\ 1 - t, & 1 - \tau(A) \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Переходя к пределу при $A \to +\infty$, получим, что численное значение задачи равно четырем и обобщенное управление есть $\hat{u}_{об}(t) = 4\delta(t - 1/2)$, а обобщенным решением будет $\hat{x}_{об}(t) = t$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ и $\hat{x}_{об}(t) = 1 - t$ при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

АТФ. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.

КФ. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.

Зор. Зорич В. А. Математический анализ, часть I.— М.: Наука, 1981.

Н. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. 1 и 2.— М.: Наука, 1975.

1. Ахиезер Н. И. Вариационное исчисление.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1981.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению.— М.: Наука, 1965.
3. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению.— М.: ИЛ, 1950.
4. Буслаев В. С. Вариационное исчисление.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
5. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач.— М.: Изд-во МГУ, 1974.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации.— Минск: Изд-во БГУ, 1981.
7. Гасс С. Линейное программирование.— М.: Физматгиз, 1961.
8. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М.: Физматгиз, 1961.
9. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике, т. 1 и 2.— М.: ГИТТЛ, 1957.
10. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М.: Наука, 1968.
11. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1976.
12. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию.— М.: Наука, 1969.
13. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.
14. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление.— М.: Наука, 1973.
15. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1975.
16. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.
17. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
18. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.
19. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства.— М.: ИЛ, 1948.
20. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.— М.: Мир, 1979.
21. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.— М.: Мир, 1974.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\{x \mid P(x)\}$ — множество элементов x, обладающих свойством $P(x)$

$x(\cdot)$ — обозначение, которым подчеркивается, что $x(\cdot)$ является элементом функционального пространства

$F \circ G$ — суперпозиция отображений G и F: $(F \circ G)(x) = F(G(x))$

$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — расширенная числовая прямая

$\mathbf{R}^n_+$ — неотрицательный ортант в $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n\}$

$\bar{B}(x, r) = \{y \mid \|x - y\| \leqslant r\}$ — открытый шар с центром x радиуса r

$\overset{0}{B}(x, r) = \{y \mid \|x - y\| \leqslant r\}$ — открытый шар с центром x радиуса r

$T_x M \left(T_x^+ M\right)$ — множество касательных (односторонних касательных) векторов к множеству M в точке x

X^* — пространство, сопряженное с X

$\langle x^*, x \rangle$ — значение линейного функционала x^* на элементе x

$A^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in A\}$ — аннулятор множества A

$\mathscr{L}(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных отображений пространства X в пространство Y; отображения из $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ могут отождествляться с матрицами этих отображений

I — единичный оператор (матрица)

Λ^* — оператор, сопряженный с оператором Λ, $\langle \Lambda^* y^*, x \rangle = \langle y^*, \Lambda x \rangle$

$\mathscr{U} \in \mathcal{O}(X)$ — множество $\mathscr{U}$ открыто в пространстве X

$\mathscr{U} \in \mathcal{O}(x, X)$ — множество $\mathscr{U}$, содержащее элемент x, открыто в X

$C([t_0, t_1])$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[t_0, t_1]$ с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max\limits_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$

$C^r([t_0, t_1])$ — пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[t_0, t_1]$ с нормой $\|x(\cdot)\|_r = \max\{\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0, \ldots, \|x^{(r)}(\cdot)\|_0\}$

$KC([t_0, t_1])$ — пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций, т. е. имеющих не более конечного числа разрывов первого рода (в точках разрывов существуют конечные пределы слева и справа)

$\delta F(x, \cdot)$ — вариация по Лагранжу отображения F в точке x

$F \in D^k(x)$ — отображение F дифференцируемо по Фреше k раз $(k > 1)$

$F \in SD(x)$ — отображение F строго дифференцируемо по Фреше в точке x

$\partial F(x)$ — субдифференциал функции F в точке x

$\hat{x} \in \mathrm{abs\,min}\,(\mathrm{abs\,max},\ \mathrm{abs\,extr})$ — $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум (максимум, экстремум) в задаче

$\hat{x} \in \mathrm{loc\,min}\,(\mathrm{loc\,max},\ \mathrm{loc\,extr})$ — $\hat{x}$ доставляет локальный минимум (максимум, экстремум) в задаче

$S_з$ — численное значение задачи (з)

(Р) — задача, приведенная с решением

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ